Wiederholung

$\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ heißt universelle Überl., wenn X lokal wegzshgd, und $\tilde{X}$ einfach zshgd.

$$\Longrightarrow \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X,x).$$

$[\alpha]\,\tilde{z} := \tilde{w}$

Definiert

$$\pi_1(X,x) \longmapsto \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$$
$$[\alpha] \longmapsto \{\tilde{z} \mapsto \tilde{w}\}$$

Beispiel.

$$S^n \xrightarrow{p} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

Für $n \geq 2$ gilt $\pi_1(S^n, *) = \{e\}$. (noch nicht gezeigt)

$$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

3.15 Satz (Universelle Eigenschaft)

Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine universelle Überlagerung.

$Z \xrightarrow{q} X$ eine weitere Überl. mit Z zshgd.

Dann gibt es genau eine Überl.abb

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & Z \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \quad \text{mit} \quad \begin{tikzcd} \tilde{x} \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & z \arrow[dl, mapsto] \\ & x & \end{tikzcd}$$

für vorgegebene Punkte $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, $z \in q^{-1}(x)$.

Ferner:

$$\pi_1(Z,z) \cong \mathrm{Deck}(\tilde{X}/Z).$$

$\mathrm{Deck}(Z/X)$ operiert transitiv auf den Fasern von $Z \to X$ genau dann, wenn $q_* \pi_1(Z,z)$ $\subset \pi_1(X,x)$ ein Normalteiler ist.

und dann gilt

$$\mathrm{Deck}(Z/X) \cong \frac{\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)}{\mathrm{Deck}(\tilde{X}/Z)}$$

$\square$

$$\mathrm{Deck}(\tilde{X}/Z) = \pi_1(Z,z) \cong p_* \pi_1(Z,z) \subset \pi_1(X,x)$$

Wenn. dass ein Normalteiler $\Longrightarrow$

$$\mathrm{Deck}(Z/X) \cong \pi_1(X,x) / q_* \pi_1(Z,z)$$

und

$$Z/\mathrm{Deck}(Z/X) \cong X \qquad (\text{Satz } 3.11).$$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{Deck}(Z/X)$ operiert transitiv auf den Fasern.

Umgekehrt op. $\mathrm{Deck}(Z/X)$ transitiv auf den Fasern $Z \to X \Longrightarrow Z/\mathrm{Deck}(Z/X) = X$

Ferner

$$\pi_1(X,x) \longrightarrow \mathrm{Deck}(Z/X).$$

definiert durch Pfadliftung ist wohldefiniert genau dann, wenn $p_* \pi_1(Z,z) \subset \pi_1(X,x)$ ist Normalteiler

$\square$

3.16. <u>Def</u> Eine Überl. $Z \to X$ heißt **normal**, wenn $\mathrm{Deck}(Z/X)$ transitiv auf den Fasern operiert.

3.17. <u>Satz</u>. 1) X habe eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \to X$. Nach Wahl eines Basispunktes $\tilde{x}$ über x ist diese eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphie.

2) Es gibt Bijektionen

$$\left\{ H \subset \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \text{ Untergruppen} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{Überl.} \\ Z \to X \\ \text{mit } Z \text{ zshgd} \end{array} \right\}$$

$$H \longmapsto Z := \tilde{X}/H \longrightarrow X$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Deck}(\tilde{X}/Z) & & Z \arrow[ll, mapsto] \arrow[r] & X \\ & & \tilde{X} \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\{\text{Normale Untergruppen}\} \longleftrightarrow \{\text{Normalen Überl.}\}$$

$$H \trianglelefteq \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \Rightarrow \mathrm{Deck}(Z/X) \cong \frac{\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)}{H}.$$

3) $\left\{ \begin{array}{c} \text{Inklusionen v. Untergruppen} \\ H \subset H' \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \begin{tikzcd} Z \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \\ \text{Ueberl. Abb.} \end{array} \right\}$

$\square$

3.18 <u>Beispiel</u> Bis auf Isomorphie sind die zusammenhängenden Überlagerungen von S^1

1) $\mathbb{R} \longrightarrow S^1 \longleftrightarrow (0) \subset \mathbb{Z} = \pi_1(S^1, 1)$

2) $S^1 \longrightarrow S^1 \longleftrightarrow (n) \subset \mathbb{Z}$.

$z \longmapsto z^n$

Wann existiert eine universelle Überlagerung?

Ist $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ univ. Üb. . .

und $N \subset X$ überl. Umgebung, $x \in N$

und α geschlossenen Weg mit AP = EP = x in N

und $\tilde{x} \mapsto x$. Dann liftet der Weg α

zu einem geschlossenen Weg $\tilde{\alpha}$ mit AP = EP $\tilde{x}$

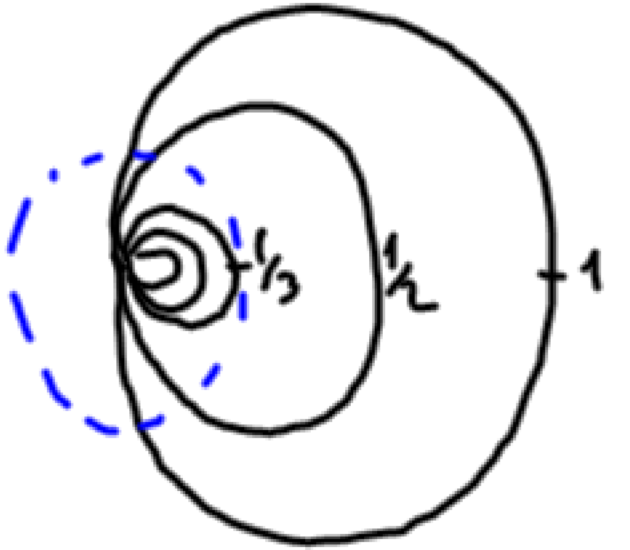
in der Komponente von $p^{-1}(N)$ die $\tilde{x}$ enthält.

Da $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) = \{e\}$.

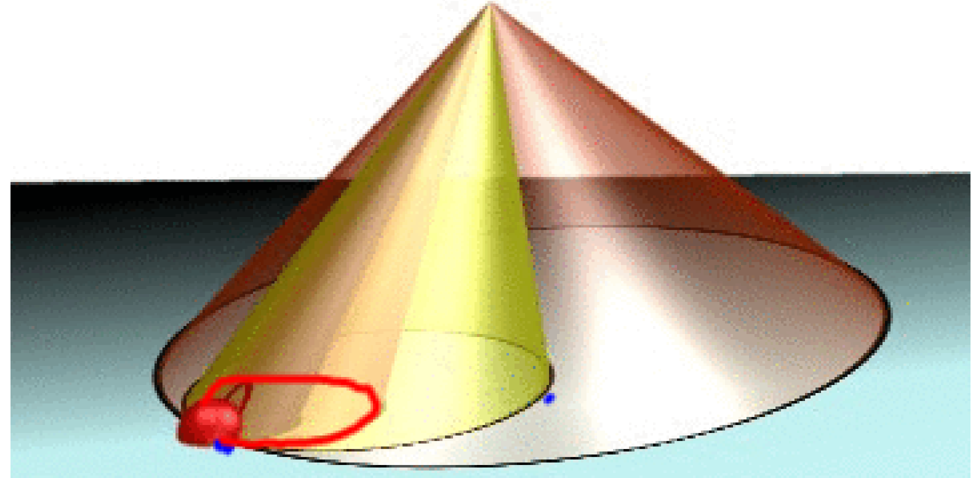
$\Rightarrow \tilde{\alpha} \sim \varepsilon_{\tilde{x}} \Longrightarrow \alpha \sim \varepsilon_x$.

Notwendig zur Existenz einer universellen Überlagerung ist, dass X semi-lokal einfach zshgd ist:

<u>Def.</u> X zshgd, lokal wegzshgd heißt semilokal einfach zshgd, wenn zu jeder Umgebung U von x eine Umgebung $N \subset U$ von x existiert, s.d. jeder geschlossene Weg in N homotop zu ε_x in X ist.



nicht semilokal
einfach zshgd.



semilokal einfach
zshgd, nicht
lokal einfach zshgd.

3.20 Satz. X zshgd, lokal wegzshgd besitzt eine universelle Überlagerung genau dann, wenn X semi lokal einfach zshgd ist.

Beweis. Notwendigkeit ist klar.

Hinrichtung: X ist wegzshgd, $x_0 \in X$.

Wir definieren

$$\tilde{X} = \left\{ [\gamma] \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma: [0,1] \to X \\ \text{mit } \gamma(0) = x_0 \end{array} \right\}$$

$\tilde{X} \longrightarrow X$ ist durch $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$ (wohldef.)

Wir müssen $\tilde{X}$ eine Topologie geben so dass

dies eine Überl. .

Eine Umgeb. $N \subset X$ um $z \in N$ heißt

gut, wenn 1) N wegzshgd.

2) Jeder geschl. Weg in N mit AP=EP=z.

in X homotopiert zu dem konstanten Weg ε_z.

Für jeden Weg γ von x_0 nach z definieren wir eine Teilmenge

$$N_{[\gamma]} = \{ [\gamma * \alpha] \mid \alpha \text{ Weg in } N \text{ mit AP } z \}.$$

Dann ist

$$N_{[\gamma]} \longrightarrow N \quad \text{bijektiv.}$$

da $\alpha \sim \alpha' \Longrightarrow [\gamma * \alpha] = [\gamma * \alpha']$.

Ferner:

a) β geschl. Weg in N

$$\Longrightarrow \quad N_{[\gamma]} = N_{[\gamma * \beta]}.$$

b) $N' \subset N$ zwei gute Umgeb.

Dann $N'_{[\gamma]} \subset N_{[\gamma]}$.

c) γ, γ' zwei Wege mit $AP = x$, $EP = z$.

Dann gilt $N_{[\gamma]} = N_{[\gamma']} \Longleftrightarrow \gamma \sim \gamma'$.

und $N_{[\gamma]} \cap N_{[\gamma']} = \emptyset$ falls $[\gamma] \neq [\gamma']$.

zu c): Ang. $N_{[\gamma]} \cap N_{[\gamma']} \neq \emptyset$

d.h. $\exists\, \alpha, \beta$ kleine Wege

$$[\gamma * \alpha] = [\gamma' * \beta].$$

$\Longrightarrow [\gamma'] = [\gamma * \alpha * \beta^{-1}]$ $\quad \alpha * \beta^{-1}$ geschl. Weg in N

$\Longrightarrow \quad \alpha * \beta^{-1} \sim \varepsilon_x$ in $X \Longrightarrow [\gamma * \alpha * \beta^{-1}] = [\gamma]$

$\Rightarrow N_{[\gamma]} = N_{[\gamma']}$.

Die Topologie von $\tilde{X}$ ist nun wie folgt erklärt: $\mathcal{U} \subset \tilde{X}$ ist offen

$\Leftrightarrow \forall [\gamma] \in \mathcal{U} \,.\, \exists$ gute Umgebung

N von $\gamma(1)$ s.d. $N_{[\gamma]} \subset \mathcal{U}$.

Damit wird

$N_{[\gamma]} \to N$ zu einem Homöom.,

wobei $\tilde{X} \to X$ zur Überlagerung.

<u>Wiederholung</u>

$\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ heißt universelle Überl., wenn X lokal wegzshgd, und $\tilde{X}$ einfach zshgd.

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X,x).$$

$[\alpha]\,\tilde{z} := \tilde{w}$

Definiert

$$\pi_1(X,x) \longmapsto \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$$

$$[\alpha] \longmapsto \{\tilde{z} \mapsto \tilde{w}\}$$

Bleibt $\pi_1(\tilde{X}, [\varepsilon_{x_0}]) = \{e\}$ zu zeigen.

$\tilde{X}$ wegzshgd. und

Sei $[\gamma] \in \tilde{X}$, dann liefert

γ_s mit $\gamma_s(t) = \gamma(st)$

eine Familie von Wegen

$$\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}, \quad s \mapsto [\gamma_s]$$

mit AP $= [\varepsilon_{x_0}]$ und Endpunkt $[\gamma]$.

Ist $\rho : [0,1] \to \tilde{X}$ geschl. Weg mit $AP = EP = [\varepsilon_{x_0}]$.

dann ist $p \circ \rho = \gamma$ geschl. Weg in X.

Für den Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$, $s \mapsto [\tilde{\gamma}|_{[0,s]}] = \rho(s)$

folgt

aus der Eindeutigkeit der Wegliftung.

Alle Wege $\rho(\sigma)$ sind geschlossen.

$\rho : [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$, $\gamma = p \circ \rho$, $\tilde{\gamma} = \rho$

gilt wegen Eindeutigkeit der Weghebung.

$\gamma_s : [0,1] \longrightarrow X$, $\gamma_s(t) = \gamma(st) = p \circ \rho(st)$

$\tilde{\gamma}_s : [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$, $\tilde{\gamma}_s(t) = \rho(st) = \rho_s(t)$.

ρ geschlossener Weg. mit AP = EP = $[\varepsilon_{x_0}]$

$\Rightarrow p \circ \rho$ geschl. Weg in X mit AP = EP = x_0.

und $\gamma_s(t) : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$, ist hier

Homotopie zwischen

$\gamma_0 \in \mathcal{E}_{x_0}$ und $\gamma_1 = p \circ \rho$

Homotopie Liftung zeigt.

$$\mathcal{E}_{[\mathcal{E}_{x_0}]}^{\sim} \rho \quad \text{in } \tilde{X}.$$

$\square$

Weil ϱ geschlossen in $\tilde{X}$ ist gilt

$$[\tilde{\gamma}_1] = [\varepsilon_{x_0}]$$

---

§4 Seifert-van Kampen

<u>Satz:</u> $U, V \subset X$ offen, zshgd, X lokal wegzshgd, $U \cap V$ zusammenhängend.

$x_0 \in U \cap V$

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(V,x_0) \arrow[dr, "j_1"] \arrow[drr, bend left, "h_1"] & & \\
\pi_1(U\cap V, x_0) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & \pi_1(X,x_0) \arrow[r, dashed, "h"] & G \\
 & \pi_1(U,x_0) \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[urr, bend right, "h_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dann existiert für jedes Paar h_1, h_2 mit

$h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2$ $\exists!$ h s.d. $h \circ j_2 = h_2$, $h \circ j_1 = h_1$.

<u>Anwendungen</u> $S^n =$  $n \geq 2$

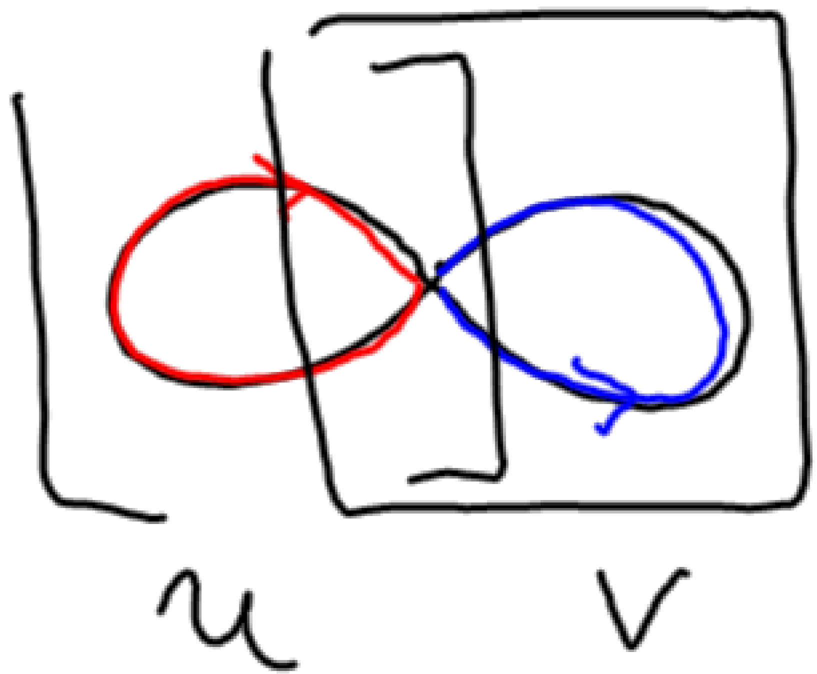
$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(D_1) \arrow[dr] & \\
\underbrace{\pi_1(S^{n-1}\times[-\varepsilon,\varepsilon])}_{\text{zshgd}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \pi_1(S^n) \\
 & \pi_1(D_2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \{e\} \arrow[dr] & \\
? \arrow[ur] \arrow[dr] & & \{e\} \\
 & \{e\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \Rightarrow \pi_1(S^n) = \{e\},$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[dr, hook] \, a & & \\
\{e\} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \pi_1(\infty) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \langle a, b \rangle \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
 & \mathbb{Z} \arrow[ur, hook] \, b & & \left\{ a^{n_1} b^{n_2} a^{n_3} \cdots b^{n_r} \right.
\end{tikzcd}$$

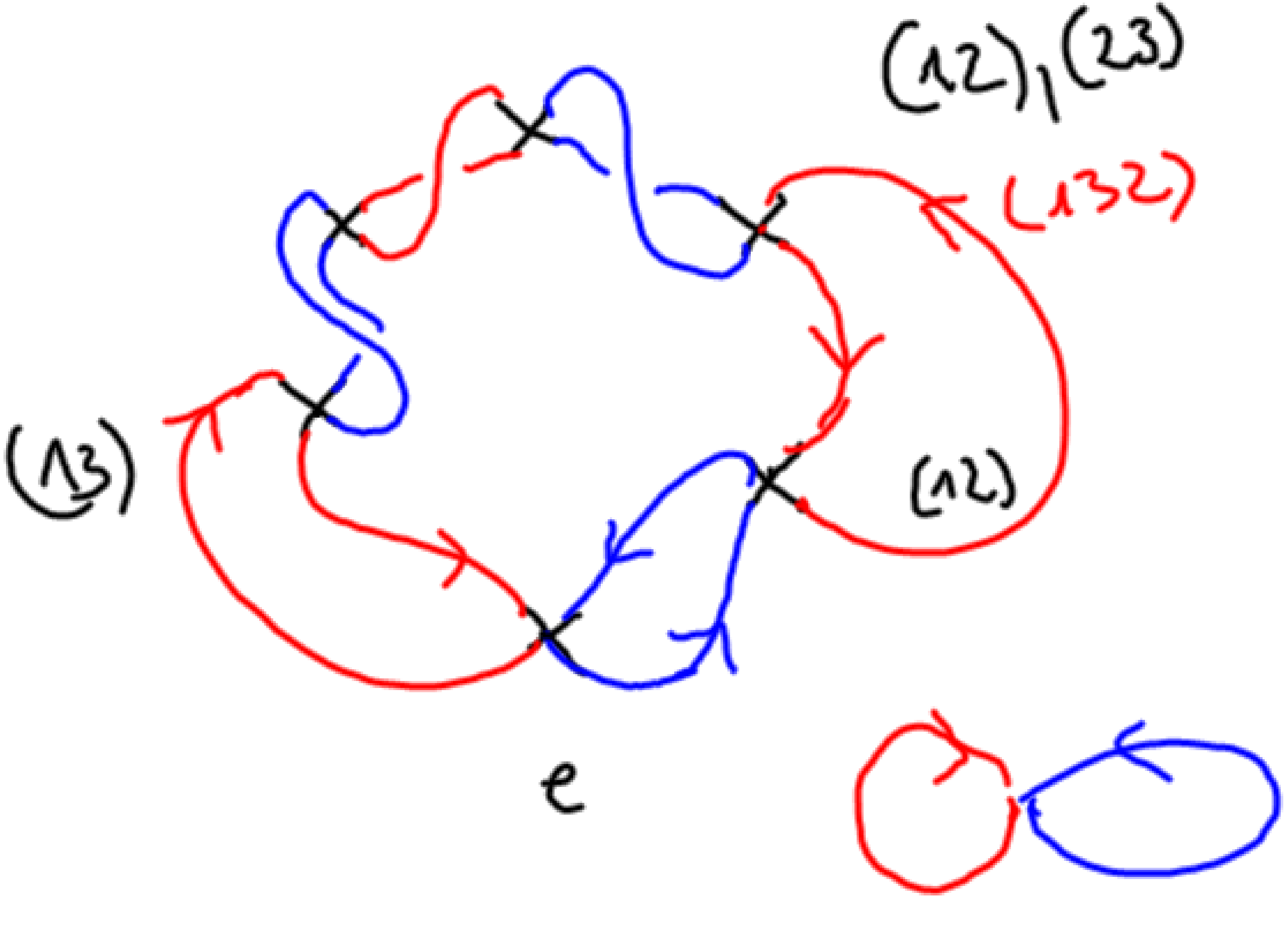
and $n_i \in \mathbb{Z}$

$n_2, \dots, n_{r-1} \neq 0$



$$H \trianglelefteq \langle a, b\rangle \xrightarrow[b \mapsto (23)]{a \mapsto (12)} S_3$$

$aba = bab$



Beispiel.

$$S^n \xrightarrow{p} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

Für $n \geq 2$ gilt $\pi_1(S^n, *) = \{e\}$. (noch nicht gezeigt)

$$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

3.15 Satz (Universelle Eigenschaft)

Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine universelle Überlagerung.

$Z \xrightarrow{q} X$ eine weitere Überl. mit Z zshgd.

Dann gibt es genau eine Überl.abb

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & Z \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \quad \text{mit} \quad \begin{tikzcd} \tilde{x} \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & z \arrow[dl, mapsto] \\ & x & \end{tikzcd}$$

für vorgegebene Punkte $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, $z \in q^{-1}(x)$.

Ferner:

$$\pi_1(Z,z) \cong \mathrm{Deck}(\tilde{X}/Z).$$

$\mathrm{Deck}(Z/X)$ operiert transitiv auf den Fasern von $Z \to X$ genau dann, wenn $q_* \pi_1(Z,z) \subset \pi_1(X,x)$ ein Normalteiler ist.

und dann gilt

$$\mathrm{Deck}(Z/X) \cong \frac{\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)}{\mathrm{Deck}(\tilde{X}/Z)}$$

$\square$

$$\mathrm{Deck}(\tilde{X}/Z) = \pi_1(Z,z) \cong p_* \pi_1(Z,z) \subset \pi_1(X,x)$$

Wenn. dass ein Normalteiler $\Longrightarrow$

$$\mathrm{Deck}(Z/X) \cong \pi_1(X,x) / q_* \pi_1(Z,z)$$

und

$$Z/\mathrm{Deck}(Z/X) \cong X \qquad (\text{Satz } 3.11).$$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{Deck}(Z/X)$ operiert transitiv auf den Fasern.

Umgekehrt op. Dech(Z/X) transitiv auf den Fasern $Z \to X$ $\Longrightarrow$ $Z/\mathrm{Dech}(Z/X) = X$

Ferner

$$\pi_1(X,x) \longrightarrow \mathrm{Dech}(Z/X).$$

definiert durch Pfadliftung ist wohldefiniert genau dann, wenn $g_* \pi_1(Z,z) \subset \pi_1(X,x)$ ist Normalteiler

$\square$

3.16. Def. Eine Überl. $Z \to X$ heißt **normal**, wenn Deck(Z/X) transitiv auf den Fasern operiert.

3.17. Satz. 1) X habe eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \to X$. Nach Wahl eines Basispunktes $\tilde{x}$ über x ist diese eindeutig vermöge eines eindeutigen Isomorphie.

2) Es gibt Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} H \subset \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \\ \text{Untergruppen} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{Überl.} \\ Z \to X \\ \text{mit } Z \text{ zshgd} \end{array} \right\}$$

$$H \longmapsto Z := \tilde{X}/H \longrightarrow X$$

$$\mathrm{Deck}(\tilde{X}/Z) \longleftarrow\!\!\mid \quad \begin{array}{ccc} Z & \to & X \\ & \nwarrow & \uparrow \\ & & \tilde{X} \end{array}$$

$$\{\text{Normale Untergruppen}\} \longleftrightarrow \{\text{Normalen Überl.}\}$$

$$H \trianglelefteq \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \Rightarrow \mathrm{Deck}(Z/X) \cong \frac{\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)}{H}.$$

3) $\left\{ \begin{array}{c} \text{Inklusionen v. Untergruppen} \\ H \subset H' \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[dr] & Z' \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd} \\ \text{Ueberl. Abb.} \end{array} \right\}$

$\square$

3.18 <u>Beispiel</u> Bis auf Isomorphie sind die zusammenhängenden Überlagerungen von S^1

1) $\mathbb{R} \longrightarrow S^1 \longleftrightarrow (0) \subset \mathbb{Z} = \pi_1(S^1, 1)$

2) $S^1 \longrightarrow S^1 \longleftrightarrow (n) \subset \mathbb{Z}.$

$z \longmapsto z^n$