Satz 4.1. $X = U \cup V$, U, V offen, $X, U, V, U \cap V$ zshgd, X lokal wegzshgd. Die Inklusionen

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, hook] & \\
x \in U \cap V \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & X \\
 & V \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Induzieren Diagramm mit folgender univers. Eigensch. H

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,x) \arrow[dr, "j_1"] \arrow[drr, bend left, "h_1"] & & \\
\pi_1(U \cap V, x) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & \pi_1(X,x) \arrow[r, dashed, "\exists!"] & G \\
 & \pi_1(V,x) \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[urr, bend right, "h_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Satz $\pi_1(S^n, x) \cong 1$ falls $n \geq 2$.

$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. falls $n \geq 2$.

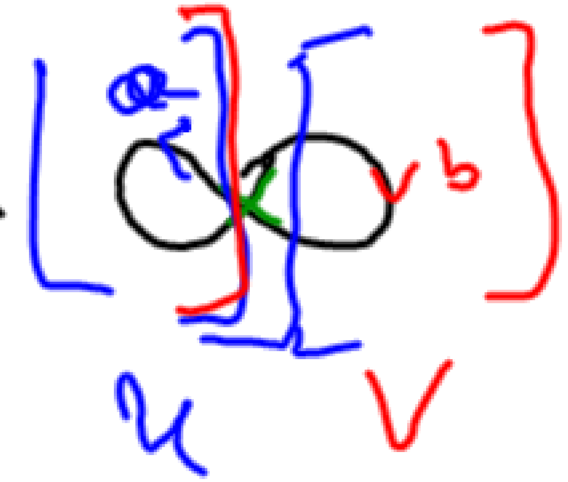
<u>Bew.</u>

$U \cap V \cong S^{n-1} \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

$U \cong B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & \\
\pi_1(U \cap V,) \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0 \\
 & 0 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

.

Bsp. $X =$ 

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,\cdot) \cong \mathbb{Z} \ni 1 \arrow[dr, mapsto] & \\
\pi_1(X,\cdot) = 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \pi_1(\infty,\cdot) \ni [a], [b] \\
 & \pi_1(V,\cdot) \cong \mathbb{Z} \ni 1 \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \pi_1(\infty,\cdot) = F_2$ die freie Gruppe erzeugt von zwei Elementen a, b

Allg.

F_n = freie Gruppe erzeugt von Elementen $a_1, \dots, a_n$.

$$F_n \ni a_{i_1}^{n_1} a_{i_2}^{n_2} \cdots a_{i_k}^{n_k}$$

mit $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $i_\ell \neq i_{\ell+1}$ für $\ell = 1, \dots, k-1$

und e.

Cor. X die Vereinigung von n Schleifen

$\Rightarrow \pi_1(X,x) = F_n$ $\square$

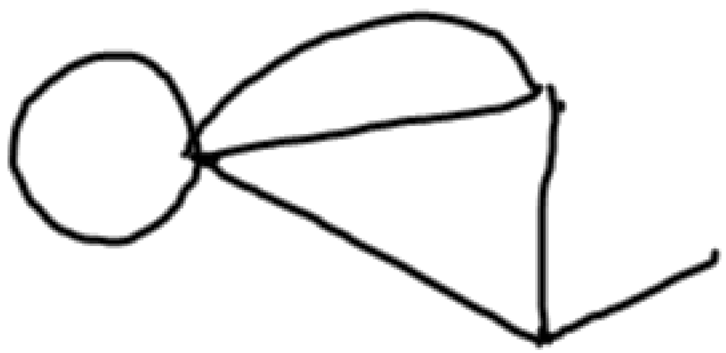
endl. [illegible]

Anwendung $G = (E, K)$ ein Graph.

E endl. Menge, K endl. Liste von Kanten.

Ecken

zshgd.



Jede Graph ist homotop zu einem Graph
zshgd.
mit nur einer Ecke. : indem sukzessive Kanten die zwei versch. Ecken verbinden zusammenzieht.

Dabei ist die Anzahl der Schleifen $k - e + 1$

4.5 **Satz** Sei $H \subset F_n$ eine Untergruppe einer freien Gruppe von endlichem Index

$$[F_n : H] = d.$$

$$\Longrightarrow \quad H \cong F_{d \cdot n - d + 1}$$

Bew. Sei X der Schleifenraum mit n Schleifen und $Y \to X$ die Überlagerung die der Untergruppe $H \subset F_n = \pi_1(X, x)$ entsp.

Dann ist $Y \to X$ eine d-blättrige Überl.

also ein Graph mit d Ecken und $n \cdot d$ Kanten

$Y \underset{\text{homotop}}{\simeq}$ Schleifenraum mit $n \cdot d - d + 1$ Schleifen

$\Rightarrow H \cong \pi_1(Y, y) \cong F_{nd-d+1}$. $\square$

Nun zum Bew. von Seifert-van Kampen:

Wir werden den Satz nur beweisen unter

Zusatzvor. dass $U \cap V$, U, V, X universelle

Überlagerungen besitzen. Dies ist zB der Fall

wenn X lokal einfach zshgd ist.

Was zB für X Mannigfaltigkeit der Fall ist.

Für den Bew. brauchen wir den Begriff

der G-Überlagerung.

Def. G Gruppe (mit diskreter Topologie)

X top Raum. Eine G-Überlagerung $Y \longrightarrow X$

ist eine Überlagerung auf G durch Rechtstransf.

lokal einfach operiert sd.

$$Y/G = X$$

Bsp. $Y = X \times G \longrightarrow X$ die triviale

G-Überlagerung.

Satz X besitze eine universelle Überl. und G sei eine Gruppe. Dann gibt es eine Bijektion

$$\left\{ \underbrace{\pi_1(X,x) \xrightarrow{\rho} G}_{\text{Gruppenhomo}} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} G\text{-Überl.} \\ Y \longrightarrow X \\ \text{mit Basis } y \mapsto x \end{array} \right\} \Big/ \text{Iso}$$

Beweis Betrachten $\tilde{X} \longrightarrow X, \tilde{x} \mapsto x$ die universelle Überlagerung.

$\pi_1(X,x)$ op auf $\tilde{X}$ durch Rechtstransform.

Sei $\rho : \pi_1(X,x) \longrightarrow G$ Gruppenhom.

Dann definieren

$$Y_\rho = \tilde{X} \times G \big/ \pi_1(X,x)$$

wobei $\pi_1(X,x)$ auf $\tilde{X} \times G$ durch

$$[\alpha](z,g) := \left([\alpha]\cdot z,\ g\left(\rho[\alpha]\right)^{-1}\right)$$

operiert. G operiert auf Y_S durch

$$\tilde{g}\,[(z, \hat{g})] = [(z, \tilde{g}\hat{g})]$$

$\uparrow$ Bahn $(z, \hat{g})$ unter $\pi_1(X, x)$.

dies ist wohldefiniert da $\pi_1(X, x)$ auf G von rechts wirkt, $\tilde{g}$ von links.

Dann gilt

$$Y_S / G = \tilde{X} \times G \big/ \pi_1(X,x) \times G = \tilde{X} \big/ \pi_1(X,x) = X.$$

Basispunkt in Y_S ist das Bild von $(\tilde{x}, e)$.

Umgekehrt sei $Y \to X$ eine G-Überl.

mit Basispunkt $y \mapsto x$.

und $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$. Dann liefert

Pfadliftung von α mit $AP = y$

einen wohldefinierten Endpunkt

$$y' = hy \in Gy = p^{-1}(x), \quad h = h_\alpha \in G$$

ist eindeutig bestimmt.

Pfadliftung von α mit AP gy

liefert den Endpunkt ghy

Für $[\alpha]*[\beta]$ haben wir also

$$h_{[\alpha][\beta]} = h_{[\beta]} h_{[\alpha]}$$

$\Rightarrow$

$$\rho : \pi_1(X,x) \longrightarrow G \text{ mit}$$

$$\rho([\alpha]) := h_{[\alpha]}^{-1} \text{ ist ein Gruppenhom.}$$

Das die konstruierten inverse zueinander sind bleibt eine Übung $\square$

Beweis von Seifert van Kampen.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,x) \arrow[d, "j_1"] \arrow[rd, "h_1"] & \\
\pi_1(U\cap V,x) \arrow[ru, "i_1"] \arrow[rd, "i_2"'] & \pi_1(X,x) & G \\
 & \pi_1(V,x) \arrow[u, "j_2"] \arrow[ru, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Nach dem Satz entspricht h_i

ein G-Überl.

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[d] & Y_{12} \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y_2 \arrow[d] \\
U & U\cap V \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & V
\end{tikzcd}$$

die eingeschränkt auf $U\cap V$ zur gleichen G-Überl. von $U\cap V$ isom. sind. Verkleben liefert

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \longrightarrow X \quad G\text{-Überl.}$$

Nach dem Satz entspricht $Y \longrightarrow X$ einem Hom.

$$\pi_1(X,x) \xrightarrow{h} G$$

der das Diagramm kommutativ macht. $\square$

§ 5. Kategorien und Funktoren

In der vor. § haben wir jedem top Raum mit Basis-punkt eine Gruppe $\pi_1(X,x)$ zugeordnet und jeder stetig Abb

$$(X,x) \xrightarrow{f} (Y,y)$$

von punktierten top. Räumen einen Gruppenhom.

$$\pi_1(f) : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y)$$

Dies ist ein Beispiel für eine Funktor.

5.1 <u>Def.</u> Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus

a) einer Klasse von Objekten. $\operatorname{Obj}\mathcal{C}$

b) Zu je zwei Objekten $X, Y \in \operatorname{Obj}\mathcal{C}$

eine Menge von Morphismen

$$\operatorname{Hom}(X,Y)$$

c) Zu drei Objekte $X, Y, Z \in \operatorname{Obj}\mathcal{C}$

eine Abb. $\operatorname{Hom}(X,Y) \times \operatorname{Hom}(Y,Z) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X,Z)$.

Schreibweise

$$(f,g) \longmapsto g \circ f .$$

mit folgenden Eigenschaften.

i) Assoziativität $h(gf) = (hg)f$

ii) Identitätselemente: Für Obj $X \in Ob\,\mathcal{C}$

$\exists\ 1_X \in Hom(X,X)$ so dass

$\forall\ f \in Hom(X,Y) \ : \quad f \cdot 1_X = f$

$\forall\ g \in Hom(Z,X) \ : \quad 1_X \cdot g = g$. gilt

Satz $Y \xrightarrow{p} X$ Überl. X lokal wegzshgd, Y zshgd

Angen. $\mathrm{Deck}(Y/X)$ operiert transitiv auf $p^{-1}(x) \ni y$

Damit ist $\quad p_* \pi_1(Y, y) \subset \pi_1(X, x)$

ein Normalteiler.

Bew. Sei $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ und γ

die Weghebung von α mit AP y

Es sei $y' = \gamma(1)$ der EP. Dann gilt

$$\pi_1(Y, y') = [\gamma^{-1}] * \pi_1(Y, y) * [\gamma] .$$

$\Longrightarrow$

$$p_* \pi_1(Y, y') = [\alpha^{-1}]\, p_* \pi_1(Y, y) [\alpha]$$

Nach bekannten Satz existiert eine Liftung

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
& X &
\end{tikzcd}
\quad \text{mit } y' \longmapsto y$$

genau dann, wenn $p_* \pi_1(Y, y') \subseteq p_*(Y, y)$

Dies ist der Fall: Da $G = \mathrm{Deck}(Y/X)$ transitiv auf $p^{-1}(x)$ operiert, $\exists\, g \in G$ mit $gy' = y$. g definiert eine Liftung

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow p_*\pi_1(Y,y) = p_*\pi_1(Y,y') = [\alpha]^{-1} p_*\pi_1(Y,y)[\alpha]$$

Also $p_*\pi_1(Y,y) \triangleleft \pi_1(X,x)$ $\square$

<u>Satz</u>. X sei semi lokal einfach zshgd und zshgd.

Dann $\exists$ $\tilde{X} \to X$ universelle Überl.

<u>Bew</u>. $x \in X$ Basispunkt. Als Menge

$$\tilde{X} = \{ [\gamma] \mid \gamma \text{ Weg in } X \text{ mit } \gamma(0) = x \}$$

$$p : \tilde{X} \to X \,, \quad p([\gamma]) = \gamma(1) \text{ wohldef.}$$

da der Endpunkt eines Weges nur von der Homotopieklasse abhängt.

$\tilde{X} \to X$ wird überl., wenn wir $\tilde{X}$ geeignete

Topologie geben: $z \in \mathcal{V} \subset X$ off. sd.

jeder geschl. Weg mit AP = EP = z in $\mathcal{V}$ in X

nullhomotop ist; dann für Weg γ von x nach z

$$\mathcal{N}_{[\gamma]} = \{ [\gamma * \alpha] \mid \alpha \text{ Weg mit } \begin{matrix} AP = z \\ EP = z \end{matrix} \}$$

$$p^{-1}(\mathcal{N}) = \dot{\bigcup_{[\gamma]}} \mathcal{N}_{[\gamma]} \longrightarrow \mathcal{N}$$

$\mathcal{N}_{[\gamma]} \longrightarrow \mathcal{N}$ ist bijektiv geben $\tilde{X}$ die Topologie die durch

$N_{[\gamma]} \xrightarrow{\cong} N$ zu Homöomorphismen macht.

$\tilde{X}$ ist zshgd. Basispunkt $\tilde{x} = [\varepsilon_x] \in \tilde{X}$.

$[\gamma] \in \tilde{X}$, $[0,1] \to \tilde{X}$, $s \mapsto [\gamma_s]$

wobei $\gamma_s(t) = \gamma(st)$ definiert ist.

ist ein Weg in $\tilde{X}$ von $[\varepsilon_x]$ nach $[\gamma]$.

$s \mapsto [\gamma_s]$ ist die Lifting des Weg $\gamma : [0,1] \to X$
$s \mapsto \gamma(s)$

da $\gamma_s(1) = p[\gamma_s] = \gamma(1 \cdot s) = \gamma(\cdot)$ $\forall s$ gilt.

Bleibt zu zeigen, dass $\hat{\tilde{X}}$ einfach zshgd ist.

d.h. $\pi_1(\hat{X}, [\varepsilon_x]) = 1$

Dazu sei $\rho : [0,1] \to \tilde{X}$ geschl. weg.

Dann ist ρ die Weghebung von $\gamma = p \circ \rho$

$\rho(0) = \rho(1)$ bedeutet also

$[\gamma] = [\gamma_1] = [\varepsilon_x]$.

Homotopie lifting zeigt

$[\rho] = [\tilde{\varepsilon}_x]$

$= [\varepsilon_{[\varepsilon_x]}]$ $\square$