5.2 Def. Ein Morphismus $f: X \to Y \in \mathcal{C}$ ist ein Isomorphismus, wenn $\exists\, g \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ s.d.

$$g \circ f = id_X \,, \quad f \circ g = id_Y$$

gilt. X und Y heißen dann isomorph.

5.3 Beispiele

1) Sets : Kategorie der Mengen mit Morphismen Abbildungen.

2) Top : topologische Räume, stetige Abb.

3) Top_* : punktierte top. Räume (X, x_0) und stetige Abb. $f: X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$

4) Groups : Kategorie der Gruppen.

5) $Sets_*$: ~~dto~~ ebenso.

6) R Ring : mod-R Kategorie der R-Moduln

7) Hot : Obj Hot = top. Räume.

$$\mathrm{Hom}_{Hot}(X,Y) = {}^{\mathrm{Hom}_{top}(X,Y)}/_{\sim}$$

wobei $f \sim g$ falls f homotop zu g.

5.4. Def. Eine Unterkategorie $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ ist eine Kategorie $\mathcal{C}'$ in der jedes Objekt $X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}'$ auch ein Objekt in $\mathcal{C}$ ist und

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

Bsp

$$\mathrm{Groups} \subset \mathrm{Sets}_*$$

$$G \longmapsto (G,e)$$

Top $\subset$ Sets , Hot $\not\subset$ Sets.

5.5. Def. Ein (covarianter) Funktor

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

zwischen zwei Kategorien, ist eine Vorschrift die Objekt $X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$ ein Objekt $F(X) \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{D}$ zuordnet zusammen mit Abbildungen

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$
$$f \longmapsto F(f).$$

sd i) $F(g\circ f) = F(g)\circ F(f)$.

ii) $F(id_X) = id_{F(X)}$.

Beispiel π_1 ist Funktor von

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Top}_* \arrow[r] & \mathrm{Groups} \\
(X, x_0) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[d, "\pi_1(f)"] \\
(Y, y_0) \arrow[r, mapsto] & \pi_1(Y, y_0)
\end{tikzcd}$$

.

Beispiel. Vergissfunktoren

$$\mathrm{Top} \xrightarrow{V} \mathrm{Sets}.$$

Ab : Kategorie der abelschen Gruppen

$= \text{mod-}\mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ab} \arrow[r, shift left, "L=V"] & \mathrm{Sets} \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(R(M), A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(M, L(A))$$

Paar von adjungierten Funktoren ; $R(M) = \mathbb{Z}^{(M)}$

5.6. Def. Ein kontravarianter Funktor

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

ist eine Zuordnung

$$F : \mathrm{Obj}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Obj}\,\mathcal{D}$$
$$X \longmapsto F(X)$$

zusammen mit Abbildungen

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$$

s.d. i) $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$, ii) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$

Beispiel. 1) k-Vekt, *: k-Vekt $\longrightarrow$ k-Vekt.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & V^* \\ W \arrow[r, mapsto] & W^* \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}.$$

2) $\mathcal{C}$ bel Kategorie, $X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$.

$$h_X : \mathcal{C} \longrightarrow \text{sets}$$
$$Y \longmapsto \mathrm{Hom}(Y, X)$$

$f \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$

$$h_X(f): \underset{h_X(Z)}{\underset{\parallel}{\mathrm{Hom}(Z,X)}} \longrightarrow \underset{h_X(Y)}{\underset{\parallel}{\mathrm{Hom}(Y,X)}}$$

$$g \longmapsto h_X(f)(g) = g \circ f$$

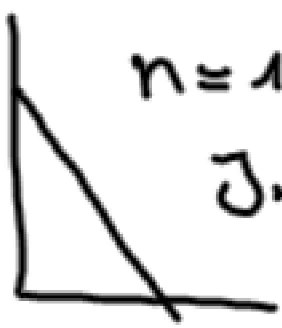
$$\square$$

§6. Simplices Komplexe & Homologie.

6.1. Def. Die Menge

$$\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}$$

heißt Standard n-Simplex.



n=1 Intervall

Dreieck, n=2

n=3

$\Delta_3 =$ 

Tetraeder

usw.

Für jede Teilmenge $I \subset \{0, \dots, n\}$, $|I| = m+1$ haben wir ein m-Simplex

$$\Delta_I = \Delta_n \cap \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_\nu = 0 \text{ falls } \nu \in I\}$$

$$\Delta_m \xrightarrow{\cong} \Delta_I$$

$$(y_0, \dots, y_m) \longmapsto \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_{i_\nu} = y_\nu\}$$

dabei ist $I = \{i_0 < i_1 < \dots < i_m\}$.

Der Rand des Standard n-Simplex besteht aus $n+1$ $(n-1)$-Simplexen.

$$\partial \Delta_n = \Delta_{\check{0}} \cup \dots \cup \Delta_{\check{n}}$$

weglassen

6.2. <u>Def.</u> Ein endlicher abstrakter simplizialer Komplex mit $N+1$ Ecken, ist Teilmenge $K \subset 2^{\{0,\dots,N\}}$

mit der Eigenschaft

$$I \in K,\ J \subset I \Rightarrow J \in K.$$

Der zugehörende simpliziale Topologische Raum von K ist

$$|K| := \bigcup_{I \in K} \Delta_I \subset \Delta_{N+1} \subset \mathbb{R}^{N+1}.$$

Die Δ_I mit $I \in K$ heißen Simplices von K.

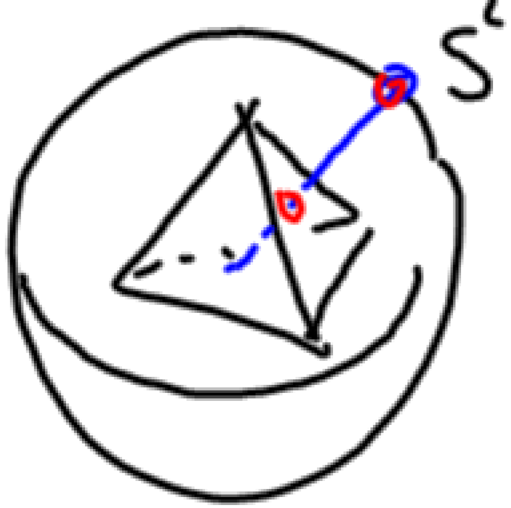
$|K|$ ist insbesondere kompakt.

6.3 <u>Def.</u> Eine Triangulierung eines (kompakten) top. Raumes, ist ein abstraktes Simpliziales Komplex K zusammen mit einem Homöomorphismus

$$\varphi : |K| \xrightarrow{\cong} X .$$

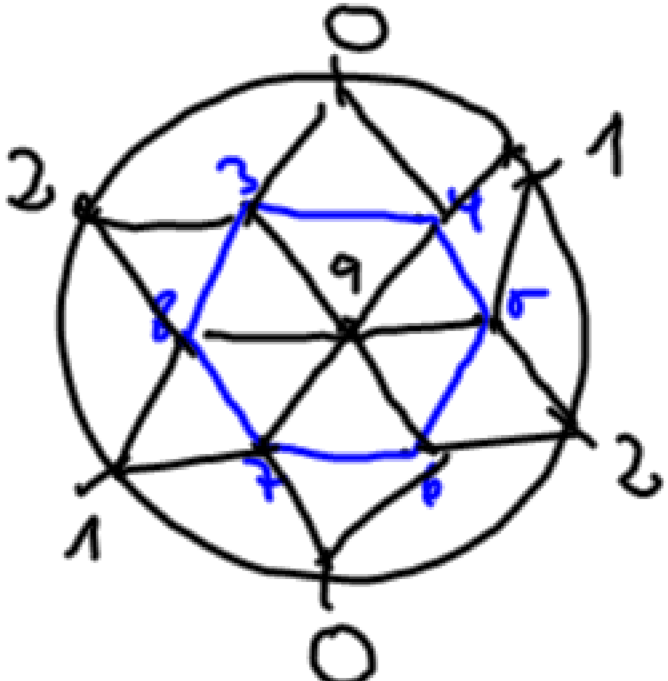
Beispiele 1) $K = 2^{\{0,\dots,n\}} \setminus \{\{0,\dots,n\}\}$

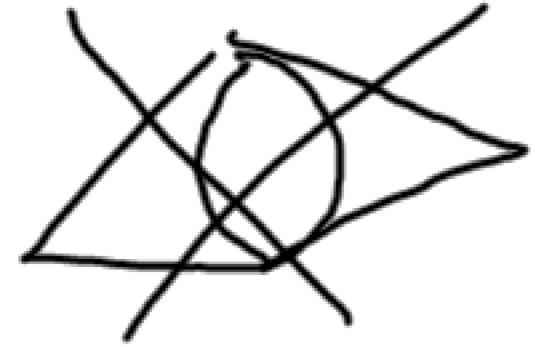
also $|K|$ der standard n-Simplex ohne das Innere liefert eine Triangulierung von S^{n-1}



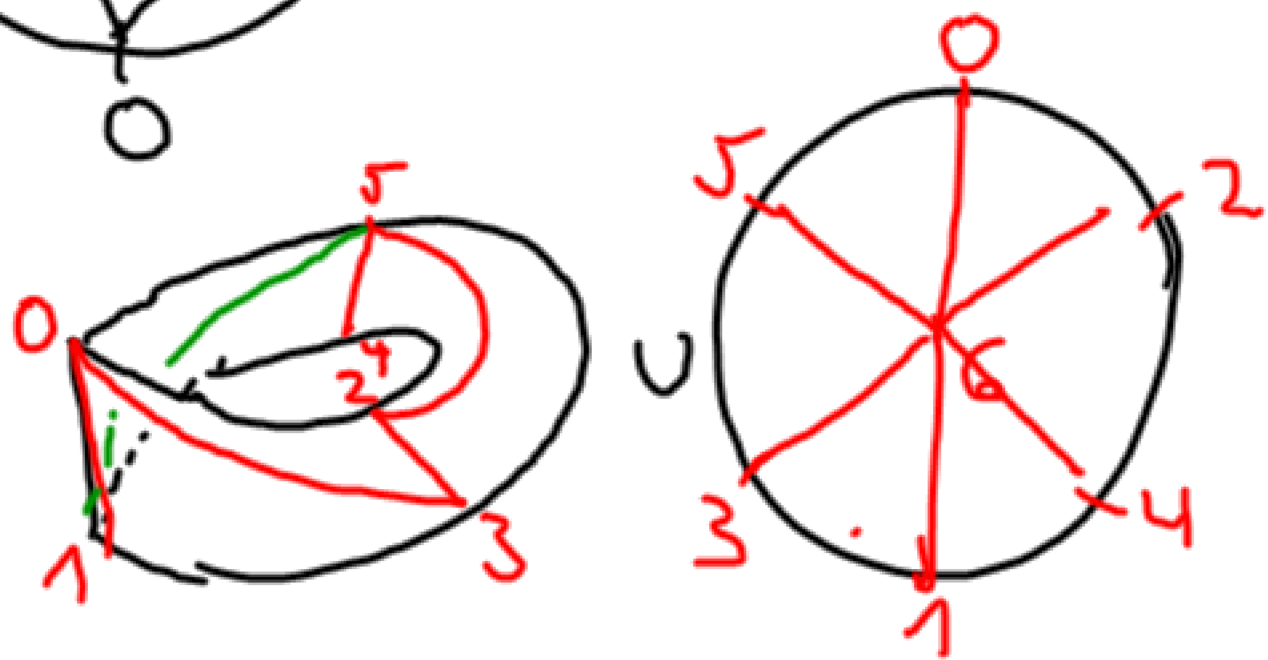
2) Triangulierungen von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

a)





b)



6.5. Def. Sei K ein abstrakter simplizialer Komplex. Setze

a) $C_p(K,\mathbb{Z}) :=$ freie abelsche Gruppe erzeugt von den Δ_I mit $I \in K$ und $|I| = p+1$.

b) $\partial_p : C_p(K,\mathbb{Z}) \longrightarrow C_{p-1}(K,\mathbb{Z})$

ein $\mathbb{Z}$-lineare Abb definiert durch

$$\partial \Delta_I = \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu \Delta_{I \setminus \{i_\nu\}}$$

wobei $I = \{i_0 < \dots < i_p\}$.

$\partial_0 = 0$.

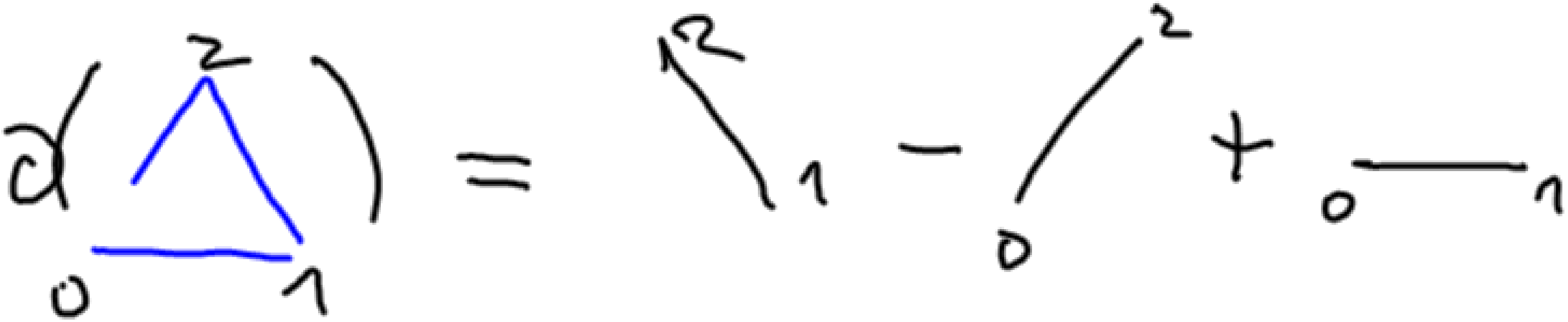
6.6. <u>Lemma</u> $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$

<u>Bew.</u> $\partial\partial \Delta_{\{0,\dots,n\}} = \partial\left(\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \Delta_{\hat{\nu}}\right)$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \left(\partial \Delta_{\hat{\nu}}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \left(\sum_{\mu=0}^{\nu-1} (-1)^\mu \Delta_{\hat{\nu},\hat{\mu}} \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu=\nu+1}^{n} (-1)^{\mu-1} \Delta_{\hat{\nu}\hat{\mu}} \right) = \sum_{\nu,\mu} \big(\underbrace{(-1)^{\nu+\mu} + (-1)^{\mu+\nu-1}}_{=0} \big) \Delta_{\nu,\mu}$$

$$= 0 \qquad \square$$



$$\partial\partial(\quad) = \cancel{\Delta_{\{1\}}} - \cancel{\Delta_{\{2\}}} - \left(\cancel{\Delta_{\{0\}}} - \cancel{\Delta_{\{2\}}}\right)$$

$$+ \cancel{\Delta_{\{0\}}} - \cancel{\Delta_{\{1\}}}$$

6.7. Def.

$$Z_p(K) = \ker \partial_p$$
$$\cup$$
$$B_p(K) = \operatorname{Bild} \partial_{p+1}$$

und

$$H_p(K) = H_p(K, \mathbb{Z}) := \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}.$$

heißen die Gruppe der

p-Zykel, p-Ränder, p-ten Homologie-Gruppe von K

mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

6.8 Satz. Ist X ein triangulierter top Raum, dann gilt

$$H_p(K,\mathbb{Z}) \cong H_p(L,\mathbb{Z})$$

für K, L simpliziale Komplexe mit

$$X \simeq |K| \simeq |L|$$

Bew. Schwierig brauchen bessere Methoden $\square$

$$H_p(|K|, \mathbb{Z}) := H_p(K, \mathbb{Z})$$

gibt eine Definition von Homologiegruppen für triangulierbare Räume.

$$b_p := \operatorname{rang} H_p(|K|, \mathbb{Z})$$

$$= \dim_{\mathbb{Q}\text{-VR}} H_p(K, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} .$$

heißt p-te Bettizahl von $|K|$.

und

$$e = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p b_p$$ heißt Eulerzahl von $|K|$.

6.9 <u>Corollar</u> Die Eulerzahl

$$e = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p b_p = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p \operatorname{rang} C_p(K, \mathbb{Z})$$

$$= \sum_{p=0}^{N} (-1)^p \cdot \# \{ I \subset K \mid |I| = p+1 \} ,$$

Bew. Situation $K \subset 2^{\{0,\dots,N\}}$

$$0 \to C_N \to C_{N-1} \to \dots \to C_1 \to C_0 \to 0$$

$\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Komplex von endl. $\mathbb{Q}$-VR.

$$0 \to Z_p \to C_p \to B_{p-1} \to 0$$

$$0 \to B_p \to Z_p \to H_p \to 0$$

$\square$