

$P \subset \mathbb{R}^n$ konvexes Polyeder.

$e := \#$ Ecken

$K := \#$ Kanten

$f = \#$ Flächen

Euler: $e - K + f = 2.$



$$4 - 6 + 4 = 2$$



$$8 - \underbrace{(12)}_{\substack{+6 \\ (+6)}} + 6 = 2$$

$$\sum_{p=0}^d (-1)^p b_p$$

$|K|$, kombinatorischer Simplicialer Komplex

$c_p = \#$ p -Simplizes. $\chi(|K|) = \sum_{p=0}^d (-1)^p c_p$

6.10 Def. Ein Komplex abelscher Gruppen
(R -VR, R -Moduln) ist Folge abelscher Gruppen

$$C: \quad \dots \rightarrow C_p \rightarrow C_{p-1} \rightarrow C_{p-2} \rightarrow \dots$$

Zusammen mit Morphismen $d_p: C_p \rightarrow C_{p-1}$

s.d

$$d_p \circ d_{p+1} = 0 \quad \forall p.$$

Ein Morphismus $f: C \rightarrow D$ ist eine
Folge von Morphismen $f_p: C_p \rightarrow D_p$ s.d.
alle Diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_p & \xrightarrow{\circ} & C_{p-1} \\ \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} \\ D_p & \xrightarrow{\circ} & D_{p-1} \end{array}$$

kommutieren.

Dies erklärt die Kategorie Comp
der Komplexe

6.11 Def. (C, ∂) ein Komplex. Dann

$$Z_p = \ker \partial_p \supset B_p = \text{Bild}(\partial_{p+1})$$

da $\partial \cdot \partial = 0$, und

$$H_p(C.) := Z_p / B_p.$$

p -te Homologiegruppe des Komplex C

C heißt exakt an der Stelle C_p wenn

$$H_p(C.) = 0 \iff Z_p = B_p$$

$$H_p: \text{Compl.} \longrightarrow \text{Ab}$$

ist ein Funktor: $f: C. \longrightarrow D.$ Morphismus
von Komplexen:

$$a) \quad f_p(Z_p(C)) \subset Z_p(D.)$$

$$b) \quad f_p(B_p(C.)) \subset B_p(D.)$$

$$f_p(\overset{4}{\partial_{p+1}}(C.)) = \partial_{p+1}(f_{p+1} C.)$$

$\Rightarrow f.$ induziert eine wohldefinierte Abb.,

$$f_p: H_p(C.) \longrightarrow H_p(D.)$$

$$[z] \longmapsto [f_p z]$$

wohldefiniert wegen a) und b).

$$H.: \text{Comp} \longrightarrow \text{grad. abelsche Gruppe.}$$

C.

$$\textcircled{+} H_p C. =: H_p C$$

6.12. Def Eine kurze exakte Sequenz
von Komplexen

$$0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{f_1} C_0 \xrightarrow{g_0} C_{-1} \rightarrow 0$$

sind zwei Komplexen f, g von Komplexen
s.d. die Sequenzen

$$0 \rightarrow C_p \rightarrow C_p \rightarrow C_p'' \rightarrow 0$$

für alle p exakt sind

6.13 Satz (Lange exakte Homologiesequenz).

Eine kurze exakte Sequenz

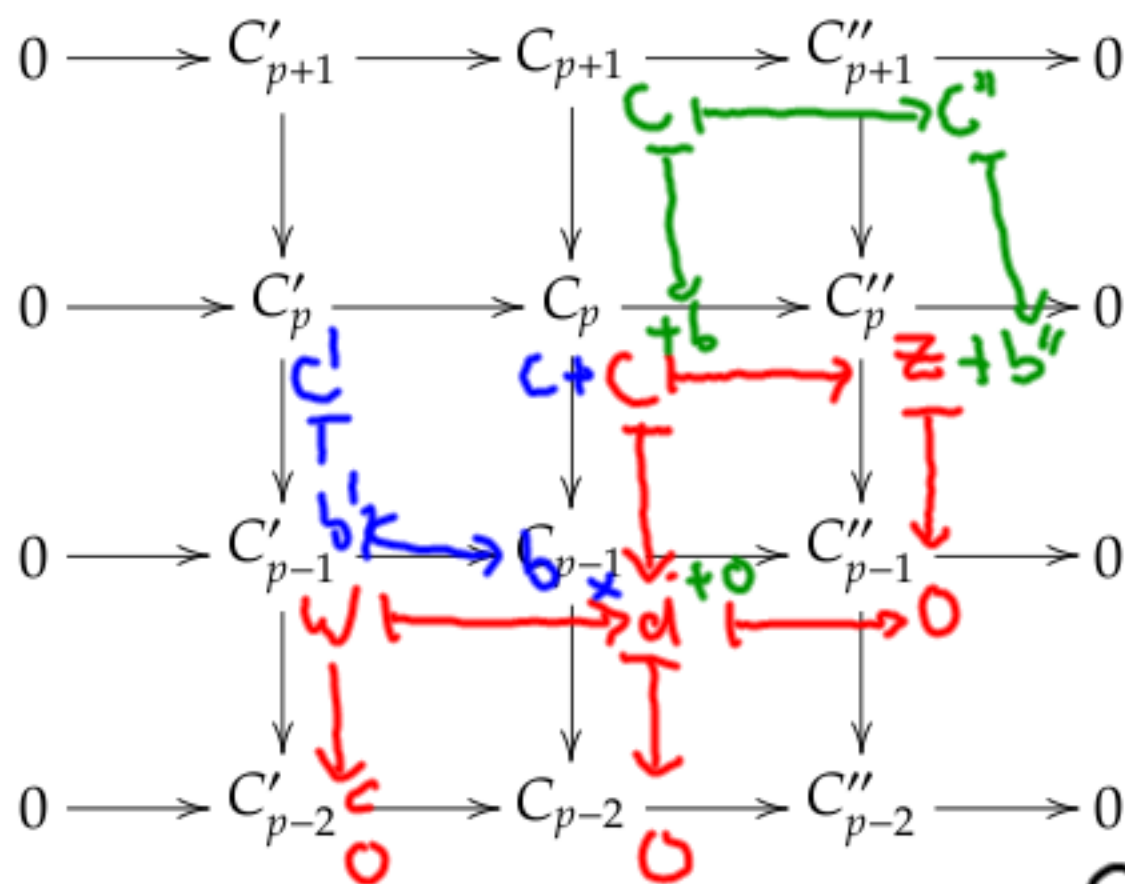
$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$$

von Komplexen induziert eine lange
exakte Sequenz in der Homologie

$$\hookrightarrow H_p(C') \rightarrow H_p(C) \rightarrow H_p(C'')$$

$$\hookrightarrow H_{p-1}(C') \rightarrow \dots$$

Beweis



Definition von der Randabb. $\delta: H_p C' \rightarrow H_{p-1} C'$.

wohldefiniert, wegen grün und blau. $[z] \mapsto \delta[z] := [w]$
 $[w] = [w + b']$.

$$\begin{array}{c}
 \cdots \longrightarrow H_p(C') \xrightarrow{f_*} H_p(C) \xrightarrow{g_*} H_p(C'') \longrightarrow \cdots \\
 \downarrow \partial \\
 \cdots \longrightarrow H_{p-1}(C') \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

$$f[z] = 0$$

$$g[u] = [z]$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C'_{p+1} & \longrightarrow & C_{p+1} & \longrightarrow & C''_{p+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C'_p & \longrightarrow & C_p & \longrightarrow & C''_p \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C'_{p-1} & \longrightarrow & C_{p-1} & \longrightarrow & C''_{p-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C'_{p-2} & \longrightarrow & C_{p-2} & \longrightarrow & C''_{p-2} \longrightarrow 0
 \end{array}$$



§7. Singuläre Homologie.

7.1 Def. Sei X top Raum ein
singuläres n -Simplex ist stetige Abb

$$\sigma: \Delta_n \rightarrow X$$

$C_n(X) :=$ freie abelsche Gruppe

besteht aus allen singulären n -Simplexen.

Der Rand eines n -Simplex σ

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i \in C_{n-1}(X).$$

Wobei $\varepsilon_i: \Delta_{n-1} \hookrightarrow \Delta_n$ affin mit

$$e_0, \dots, e_{n-1} \mapsto e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$$

und $\mathbb{Z}$ -lineare Fortsetzung gibt.

$$\partial: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

Dann gilt. $\partial \circ \partial = 0: C_n(X) \rightarrow C_{n-2}(X).$

Die Elemente von $C_n(X)$ nennt (singuläre)
 n -Ketten; die von $Z_n(X) = \ker(\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))$
 n -Zykel und $B_n(X) = \text{Bild } \partial_{n+1}: C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)$
 n -Ränder. Schließlich

$$H_n(X) := Z_n(X) / B_n(X)$$

heißt n -te (singuläre) Homologiegruppe
 von X . $(C_*(X), \partial)$ heißt (sing) Kettenkomplex
 von X .

Ist $f: X \rightarrow Y$ stetige Abb.

dann induziert

$$\phi \mapsto f \circ \phi$$

durch $\mathbb{Z}$ -lineare Fortsetzung eine Abb.

$$f_*: C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$$

zwischen Komplexen, denn

$$\begin{aligned} f_p(\partial \phi) &= f_* \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i \phi \circ \varepsilon_i \right) = \sum (-1)^i f \circ \phi \circ \varepsilon_i \\ &= \partial(f \circ \phi) \end{aligned}$$

da f linear und
linear in $\mathbb{R}$ komplex

Also $f: C(X) \rightarrow C(Y)$ induziert Gruppen.

$$H_p(f): H_p(X) \rightarrow H_p(Y).$$

7.2. Beur. 1) Wir haben also Funktoren

$$\text{Top} \xrightarrow{C} \text{Comp.} \xrightarrow{H_p} \text{ab.}$$

In Gegensatz zur Definition von Homologie
gruppen mit Triangulierung, ist dies
funktoriell; aber wir werden erst

noch sehen wir man $H_p(X)$ berechnen kann.

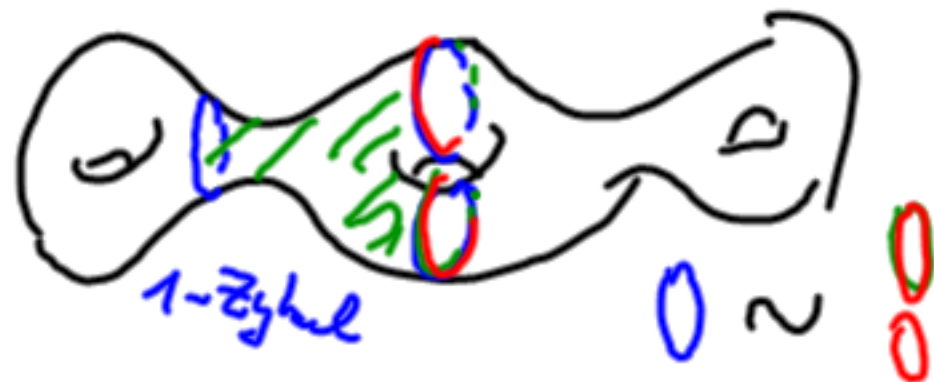
2) X Mannigfaltigkeit. Dann stellt man

sich einen n -Zykel oft als n -dim.

kompakte triangulierte Untermannigfaltigkeit vor

Ein n -Rand, als Rand einer triangulierten

$(n+1)$ Mannigf. mit Rand



3) $H_0(X) = \mathbb{Z}^{b_0}$ wobei $b_0 = \# \text{Wegpunkts}$
Komp.

4) $H_n(X)$ berechnen, werden wir erst
nach und nach kennenlernen. Die Methoden
bestehen aus einer Reihe von Sätzen.

Man kann zeigen, dass durch diese Sätze
die Homologietheorie für eine große Klasse
von top. Räumen eindeutig bestimmt ist.
Sie bekommen deshalb den Zusatz "Axiom".

7.3 Satz ("Dimension axiom".)

Sei $X = \{*\}$ ein 1-punktiger Top Raum.

Dann gilt

$$H_0(\{*\}) = \mathbb{Z}, \quad H_p(\{*\}) = 0 \text{ für } p > 0.$$

Beweis. Es gibt nur eine (stetige) Abb.

$$c: \Delta_n \rightarrow \{*\}. \text{ Also}$$

$$C_n(\{*\}) \cong \mathbb{Z}.$$

$$\partial_n(\mathbb{C}) = \begin{cases} 0 & n \equiv 1 \pmod{2} \\ 1 & n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \quad \mathbb{C}_{n-1}(\{*\}) = \mathbb{Z}$$

da Δ_n eine gerade oder ungerade Anzahl
von Spalten hat. Also $\mathbb{C}(\{*\})$

$$\dots \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

sonst. 0

$$0, \quad H_0(\{*\}) = \mathbb{Z}$$

□

7.4. Satz. "Homotopie Axiom".

Es seien $f, g: X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen.

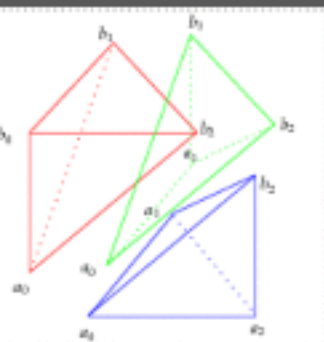
Sind f und g homotop, dann gilt

$$H_n(f) = H_n(g)$$

Erinnerung f, g homotop $(\Leftrightarrow) \exists$ stetige Abb

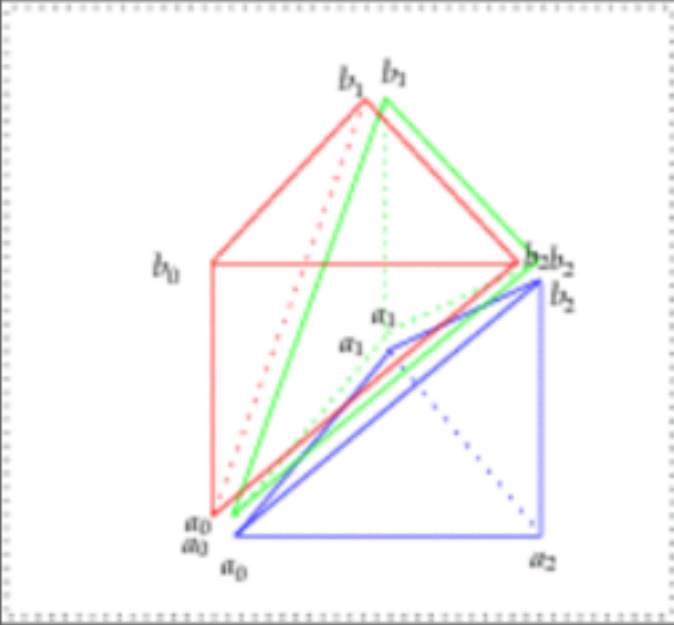
$$F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

$$\text{mit } F(\cdot, 0) = f, \quad F(\cdot, 1) = g.$$



ist die Prismenkonstruktion.

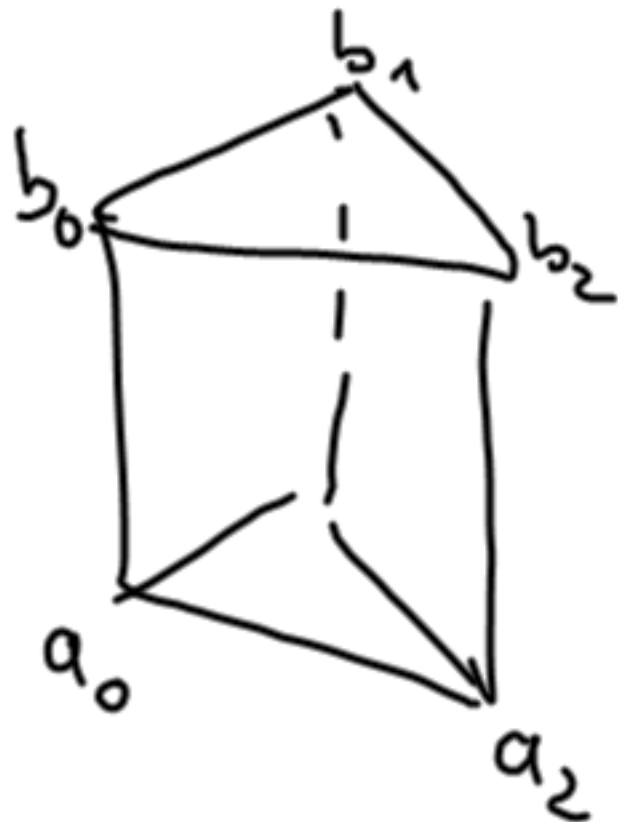
$$\begin{array}{c} f \\ \hline \hline g \end{array} \rightarrow \gamma ; \Delta_n \times \mathbb{I}.$$



$$\Delta_2 \times [0, 1] = [a_0, b_0, b_1, b_2] + [a_0, a_1, b_1, b_2] + [a_0, a_1, a_2, b_2]$$

$$\Delta_n \times [0,1] \xrightarrow{F \circ (\mathcal{O} \times \text{id})} Y \quad \mathcal{O}: \Delta_n \rightarrow X \xrightarrow{F}$$

Zerlegen des Prisma



in $(n+1)$ $(n+1)$ Simplices

mit Ecken

$$[a_0, b_0, \dots, b_n]$$

$$[a_0, a_n, b_1, \dots, b_n]$$

$$[a_0, \dots, a_n, b_n].$$

Notation. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^N$ konvexe Teilmenge

$P_0, \dots, P_n \in \mathbb{Z}$. Dann betrachte

$[P_0, \dots, P_n]: \Delta_n \longrightarrow \mathbb{Z}$ affine Abb.

$$(t_0, \dots, t_n) \mapsto \sum_{i=0}^n t_i \cdot P_i,$$

$\Delta_n \times \mathbb{I} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ ist konvex. Definieren

$$\beta(z) = \sum_{i=0}^n (-1)^i F_0(z \times \text{id}) \circ [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_n]$$

$\in C_{n+1}(Y)$

Der Rand $\partial \beta(\mathbb{D})$ ist das Bild des
Randes der Prisma.

Durch $\mathbb{Z}$ lineare Fortsetzung

$$\beta: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y).$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial} & \dots \\
 & \searrow & \downarrow g_* - f_* & \swarrow & \downarrow g_* - f_* & \swarrow & \\
 \xrightarrow{\partial} C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & \dots
 \end{array}$$

β (diagonal arrows from $C_n(X)$ to $C_n(Y)$ and $C_{n-1}(X)$ to $C_{n-1}(Y)$)
 $g_* - f_*$ (vertical arrows)

Beh.

$$\partial \circ \beta + \beta \circ \partial = g. - f.$$

Bew. Nach Konstruktion ist dies richtig
für jede Ebene $z \in C_n(X)$. $\square$



7.4. Def. C, D Komplexe.

$f, g: C \rightarrow D$, Morph.

Ein Homotopie m f. nach g .

ist eine Familie $\beta_n: C_n \rightarrow C_{n+1}$

s.d.

$$\partial_{n+1} \circ \beta_n + \beta_{n-1} \circ \partial_n = f_n - g_n$$

$C_n \rightarrow C_n$

7.5. Lemma Homotope Abb. zwischen Ketten
induzieren die Identische Abb. auf der Homologie!