

7.5. Lemma. Homotope Abbildg $C \xrightarrow[f]{f} D$.

Zwischen Komplexen, wodurch die gleiche Abb.

$$H_n(f) = H_n(g): H_n(C) \rightarrow H_n(D)$$

auf der Homologie.

Bew. $\exists \beta_q: C_q \rightarrow D_{q+1}$ mit

$$\partial_{q+1} \circ \beta_q + \beta_{q-1} \circ \partial_q = f_q - g_q \quad \text{nach Vor.}$$

Sei $[z] \in H_n(\mathbb{C})$. Dann ist

$$H_n(f)[z] = [f_n(z)].$$

Wir müssen also

$$f_n(z) - g_n(z) \in B_n(\mathbb{D})$$

Da z Zyklotisch, gilt $\partial_t = 0$ also

$$\partial_{n+1} \beta_n z \in B_n(\mathbb{D}) \quad \begin{matrix} 0 \\ \parallel \end{matrix}$$

$$\text{Also } (f_n - g_n)(\bar{z}) = (\partial_{n+1} \beta_n + \beta_{n-1} \partial_n) z \quad \square$$

7.6. Cor. Ist $X \subset \mathbb{R}^N$ zusammenhängend.

dann gilt

$$H_n(X) = \begin{cases} 0 & n > 0 \\ \mathbb{Z} & n = 0 \end{cases}$$

Bew. $x_0 \in X$ der Punkt bzgl. der X zusammenhängend ist

also $x + t(x_0 - x) \in X \quad \forall t \in [0, 1]$

Du Abbildung

$$X \rightarrow \{x_0\} \hookrightarrow X \quad \text{und}$$

id_X sind Homotop.

$$F: X \times I \longrightarrow X$$

$$F(x, t) = x + t(x_0 - x)$$

$$F(-, 0) = \text{id}_X, \quad F(-, 1) = x_0.$$

$$\Rightarrow H_n(\text{id}): H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$$



faktoriert,

für $n > 0$ bzw. $0 \Rightarrow \text{Beh.}$

§8. Der Ausschneidungssatz

8.1. Def. X top Raum, $A \subset X$ mit ind. Topologie.

Dann ist

$C(A) \hookrightarrow C(X)$ ein Unterkomplex.

Wir definieren $C(X, A)$ durch

$$C_n(X, A) := C_n(X) / C_n(A)$$

und $\partial_n: C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$ induziert von ∂_n .

Die relative Homologie von X bzgl A , bzw Homologie
 (X, A) ist dann

$$H_n(X, A) := H_n(C(X, A)).$$

8.2. Satz. Zu jeder Paarpaar (X, A)
haben wir eine lange exakte Homologie Sequenz

$$\begin{array}{c} \hookrightarrow \overset{\dots}{H_n(A)} \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \\ \hookrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Bew. ✓

$$0 \rightarrow C.(A) \rightarrow C.(X) \rightarrow C.(X, A) \rightarrow 0$$

ist eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. $\square$

Für $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ Morphismus

in Raumpaaren, d.h. $f: X \rightarrow Y$ stetig, $f(A) \subset B$

ist die Randabb. $H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$

mit f verträglich

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow f \\ & \square & \\ H_n(Y, B) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) \end{array}$$

Bew. Klar die Randabbildung haben wir schon
und Diagramm jetzt definiert ist $\square$

8.3. Bew. 1) Ein typischer Element
von $H_n(X, A)$ stellt man sich als
eine n -dim. triangulierte Mannigfaltigkeit Rand vor
dem $\partial M \subset A$. $[M] \mapsto [\partial M] \in H_n(A)$.

$$2) \quad H_n(X) = H_n(X, \emptyset)$$

8.4. Satz (Ausscheidungsaxiom).

(X, A) Raumpaar, $U \subset X$ Teilmenge

mit $\overline{U} \subset A$ (Der Abschluß von U
liegt im Inneren von A).

Dann gilt

$$H_n(X, A) \cong H_n(X \setminus U, A \setminus U)$$

Kommutativität des Exakten Komplexes.



Zunächst Anwender.

B.5. Satz (Auschnittaxiom, 2te Version)

$$X \supset X_1, X_2 \text{ s.d. } X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$$

$$j: (X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X, X_2)$$

Dann ist

$$H_n(j): H_n(X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow H_n(X, X_2)$$

ein Isomorphismus.

Bew. 2-te Version äquivalent zu 1. Version.

$$A = X_2, \quad U = X \setminus X_1, \quad \overline{U} = X \setminus \overset{\circ}{X}_1 \subset \overset{\circ}{X}_2$$

$$A \setminus U = X_2 \setminus (X \setminus X_1) = X_2 \cap X_1.$$

Die Äquivalenz folgt.

8.6. Satz (Mayer-Vietoris)

$$X_1, X_2 \subset X, \text{ mit } X_1 \cup X_2 = X$$

Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\hookrightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{d_1 - d_2} H_n(X)$$

$\Downarrow$

$$\hookrightarrow H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots$$

Beweis.

Lemma Gegeben sei ein Diagramm

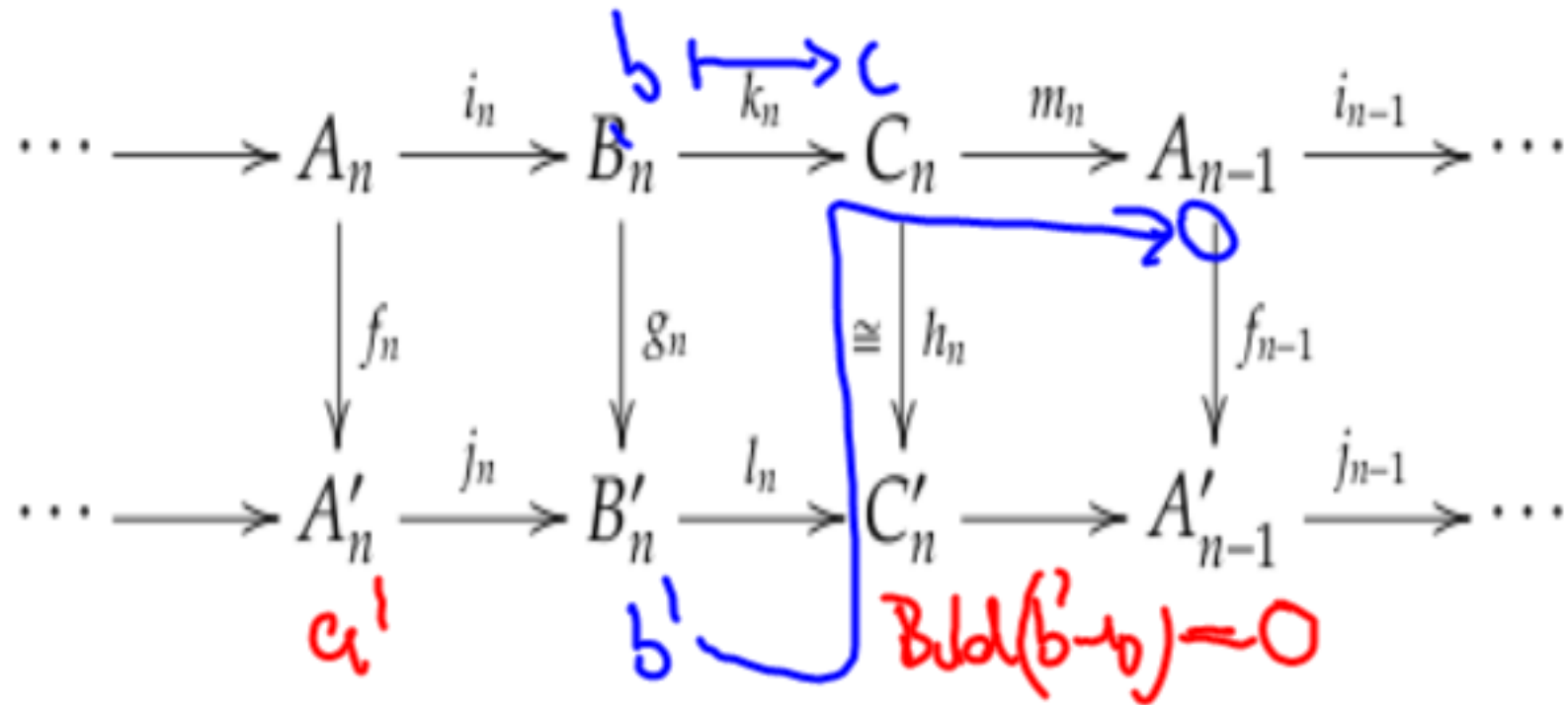
$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i_n} & B_n & \xrightarrow{k_n} & C_n \xrightarrow{m_n} A_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} \cdots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n & & \downarrow \cong \downarrow h_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{j_n} & B'_n & \xrightarrow{l_n} & C'_n \longrightarrow A'_{n-1} \xrightarrow{j_{n-1}} \cdots \end{array}$$

mit exakten Zeilen, so h_n isom.
Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$A_n \xrightarrow{(i_n, f_n)} B_n \oplus A'_n \xrightarrow{h_n - g_n} B'_n \xrightarrow{D} A_{n-1}$$

mit D wie angedeutet.

Beweis: Diagramm kommut.



$(a', b) \mapsto b' - b + b = b' \Rightarrow$ Existenz
 an der Stelle B'_n

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \color{blue}{C} & \xrightarrow{\color{blue}{h}} & \color{green}{b} & \xrightarrow{\color{green}{k}} & 0 \\
 \cdots & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i_n} & B_n & \xrightarrow{k_n} & C_n \xrightarrow{m_n} A_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} \cdots \\
 & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n & & \downarrow \cong h_n \\
 \textcircled{0} & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{j_n} & B'_n & \xrightarrow{l_n} & C'_n \xrightarrow{m_{n-1}} A'_{n-1} \xrightarrow{j_{n-1}} \cdots
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \color{green}{a' \mapsto j_n(a) + g_n(b) = 0} \\
 & \color{blue}{f_n(k) - a' \mapsto 0}
 \end{aligned}$$

$$\color{green}{A'_n \oplus B_n \longrightarrow B'_n}$$

Ersetzen a' durch $a \sim \textcircled{0}$

+ ein weiteres folgt



Beweis m. &G. Wir wenden das Lemma
 auf die lange exakte Homotopiesequenzen
 induziert von

$$\begin{array}{ccccc}
 (X_1 \cap X_2, \emptyset) & \hookrightarrow & (X_1, \emptyset) & \longrightarrow & (X_1, X_1 \cap X_2) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h \\
 (X_2, \emptyset) & \hookrightarrow & (X, \emptyset) & \longrightarrow & (X, X_2)
 \end{array}$$

am :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots H_n(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & H_n(X_1) & \longrightarrow & H_n(X_1, X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \cdots \\
 \downarrow H_n(i) & & \downarrow H_n(j) & & \downarrow h_n & & \downarrow H_{n-1}(i) \\
 \cdots H_n(X_2) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, X_2) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \cdots
 \end{array}$$



8.8. Satz. $S^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 = 1 \}$
die n Sphäre. Dann gilt

$$H_p(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } p=0, n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bew. $S^n = X_1 \cup X_2$ mit $X_1 = \{ x \in S^n \mid x_n \geq \frac{1}{2} \}$
 $X_2 = \{ x \in S^n \mid x_n \leq \frac{1}{2} \}$

$$X_1 \cap X_2 \cong S^{n-1} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \xrightarrow{\text{homotop}} S^{n-1}$$

$$S^{n-1} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \xrightarrow{g} S^{n-1} = S^{n-1} \times \{0\} \subset S^{n-1} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

homotop re id.

$$\Rightarrow H_p(X_1 \cap X_2) = H_p(S^{n-1})$$

$$H_p(X_i) = \begin{cases} 0 & p > 0 \\ \mathbb{Z} & p = 0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{Z}.$$

$$H_p(S^{n-1}) \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow H_p(S^n)$$

$$\rightarrow H_{p-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \dots$$

$$0 \oplus 0 \rightarrow H_1(S^n)$$

$$H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \rightarrow H_0(S^n) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{(1-1)} \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1}) \quad \text{für } p \geq 2$$

$$H_n(S^n) = 0 \quad \text{für } n \geq 2.$$

$\Rightarrow$ Beh $\square$

8.9. Cor. (Brouwer's Fixpunkt Satz).

Sei $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.

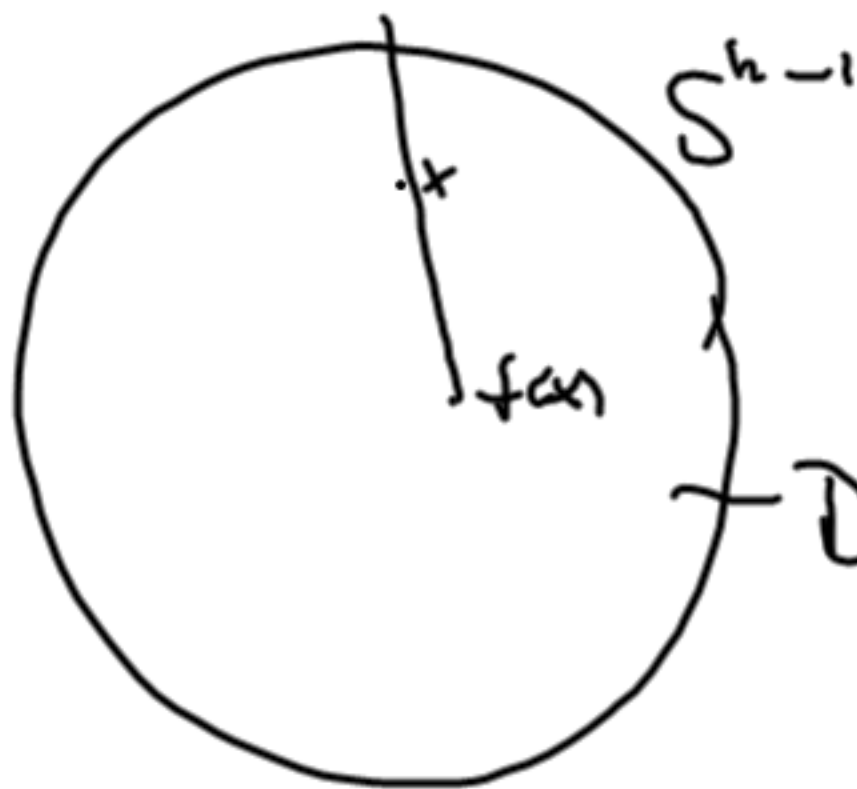
$f: D^n \rightarrow D^n$ stetige Abb.

Dann hat f einen Fixpunkt.

Bew. Angen. ~~1~~ Fixpunkt, Dann ist

$$x \neq f(x) \quad \forall x \in D$$

Sei $g(x)$ der Schnitt



Punkt der Halboberfläche
durch $f(x)$ und x

Dann ist

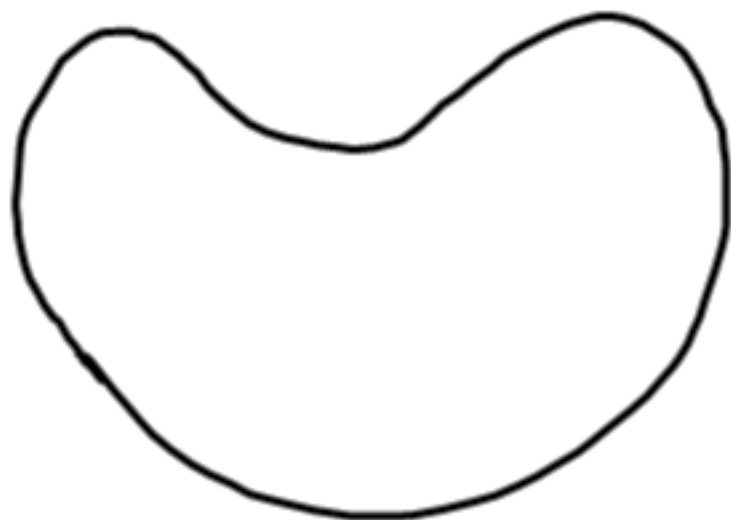
$$g: D^n \rightarrow S^{n-1}$$

$$\text{mit } g|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}.$$

$$\Rightarrow H^{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i} H^{n-1}(D^n) \xrightarrow{g} H^{n-1}(S^{n-1})$$

$n \geq 2$

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z} \end{array} \quad \downarrow$$



$\cong$



8.10 Satz Nichtleere offene Teilmengen
 $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ sind
nicht homeomorph.

Bew. Ang. $\varphi: U \rightarrow V$
ist homeom. $y = \varphi(x), x \in U$.

Betrachten

$$U \sim \{x\} \subset U \subset \mathbb{R}^n$$

Ausschnitt gibt:

$$H_p(U, U \setminus \{x\}) = H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$$

Long exakte Seq.

$$H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} H_{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) = H_{p-1}(S^{n-1})$$

$$= \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } p=n \\ 0 & p \neq 0, n \end{cases} \quad \text{Die Beh. folgt.}$$

□

8.11. Baryzentrische Unterteilung

