Bew.

$$H_p(S^{n-1}\times]-1,1[) \cong H_p(S^{n-1}).$$

$$S^{n-1}\times]-1,1[\xrightarrow{p} S^{n-1} = S^{n-1}\times\{0\} \subset S^{n-1}\times]-1,1[$$

$$i\circ p \sim \mathrm{id}_{S^{n-1}\times]-1,1[}\,, \quad p\circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$$

$$\mathbb{Z} = H_{n-1}(S^{n-1}) \rightsquigarrow$$

8.11. Baryzentrische Unterteilung.

 .

Def. 1) $[a_0, \dots, a_n]$ ein affines n-Simplex in konvexer Menge $V \subset \mathbb{R}^N$. Dann heißt

$$\bar{a} = \frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1} \in V$$ das Baryzenter.

2) $[a_0, \dots, a_n]$ affin. Simplex in V und $b \in V$. Dann def.

$$K_b[a_0, \dots, a_n] = [b, a_0, \dots, a_n]$$

der Kegel über $[a_0, \dots, a_n]$ mit Spitze in b.

$\mathbb{Z}$-lineare Fortsetzung definiert

$$C_n^{\mathrm{aff}}(V) \xrightarrow{K_b} C_{n+1}^{\mathrm{aff}}(V).$$

Definiere induktiv

$$U_n : C_n^{aff}(V) \longrightarrow C_n^{aff}(V)$$

Unterteilungsoperatoren durch

$U_0 = \mathrm{id}$ und $U_n[a_0, \ldots, a_n] :=$

$$K_{\bar{a}}(U_{n-1}\partial[a_0, \ldots, a_n]) .$$

<u>Beh.</u> $\partial_n U_n = U_{n-1} \circ \partial_n$

Bew.: $\partial_n(K_{\bar{a}} U_{n-1} \partial[a_0 \dots a_n])$

$$= U_{n-1}\partial[a_0, \dots, a_n] - K_{\bar{a}}(\partial U_{n-1} \partial[a])$$

$$\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} U_{n-1}\partial[a] - K_{\bar{a}}(U_{n-2}\underbrace{\partial\partial[a]}_{0})$$

$$= U_{n-1}\partial[a]$$

$$\Rightarrow \quad \partial_n U_n = U_{n-1}\partial_n .$$

$\square$

Für beliebigen top Raum X ist

$$U_n : C_n(X) \to C_n(X)$$

durch

$$U_n(\sigma) := \sigma_* U_n(\mathrm{id}_{\Delta_n})$$

affines Simplex.

$\sigma : \Delta_n \to X$ und $\mathbb{Z}$-lineare Fortsetzung.

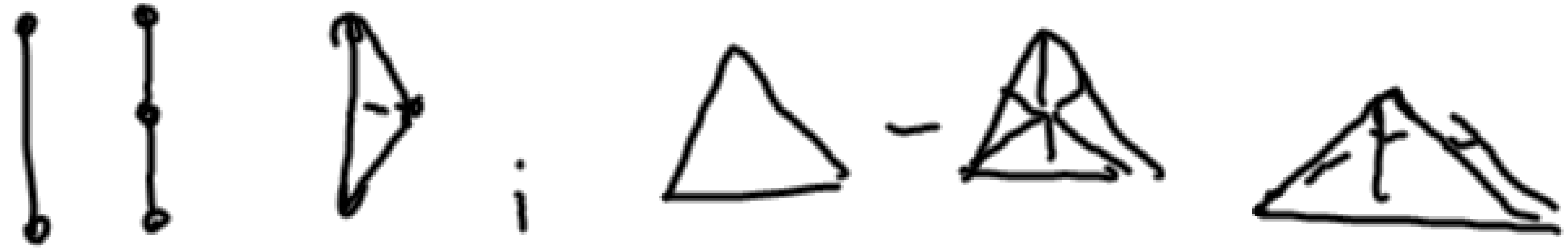
Dann gilt weiterhin. $U_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ U_n$

8.13 __Lemma__ U induziert die Identität auf $H_n(X)$.

Bew. Idee: Konstruiere Homotopie R

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_n(X) \arrow[r] \arrow[dl, "R"'] \arrow[d, "U"] & C_{n-1}(X) \arrow[dl, "R"'] \arrow[d, "U"] \\
C_{n+1}(X) \arrow[r] & C_n(X) \arrow[r] & C_{n-1}(X)
\end{tikzcd}$$

zwischen U und $\mathrm{id}_{C.(X)}$.



Wir definieren R genauso wie U zunächst für affine Simplizes induktiv:
Wollen

$$\partial_{q+1} R_q + R_{q-1} \circ \partial_q = \mathrm{id}_{C_q} - U_q \quad !$$

$R_0 = 0$; $\underset{\substack{\shortparallel \\ \mathrm{id}-\mathrm{id}.}}{0} = \partial_1 \circ R_0 =$ ✓

$[a_0, \dots, a_q]$ affines Simplex, $\bar{a} = \dfrac{a_0 + \dots + a_q}{q+1}$.

$$R_q[a_0, \dots, a_n] := K_{\bar{a}}\Big([a_0, \dots, a_q] - U_q[a_0 \dots a_q] - R_{q-1}\,\partial[a_0, \dots, a_q] \Big).$$

Dann gilt:

$$\partial_{q+1} R_q[a] = [a] - U_q[a]$$

$$- R_{q-1}\partial[a] - K_{\bar{a}}\partial[a] + K_{\bar{a}}\partial U_q[a]$$

$$+ K_{\bar{a}}\partial R_{q-1}\partial[a].$$

$$= (\mathrm{id} - U_q)[a] - R_{q-1}\partial[a]$$

$$\left(\underline{\text{Ind.Vor.}}: \quad \partial_q R_{q-1} + R_{q-2}\partial_{q-1} = \mathrm{id}_{C_{q-1}} - U_{q-1}.\right)$$

$$- K_{\bar{a}}\cancel{\partial}[a] + K_{\bar{a}}\partial U_q[a] + K_{\bar{a}}\left(\cancel{\mathrm{id}}_{C_{q-1}} - U_{q-1}\right)\partial[$$

$$- K_{\bar{a}}\left(R_{q-2}\cancel{\partial\partial}, w\right)$$

wie gewünscht.

Für $\sigma: \Delta_q \to X$ bel. Simplex

$$R_q(\sigma) = \sigma_* R_q(id_{\Delta_q})$$

und die Gleichung

$$R \circ \partial + \partial R = id - U$$

bleibt gültig. $\Rightarrow H_n(U) = H_n(id) = id$

$\square$

8.13. Def. X top Raum, $\mathfrak{U} = \{U_i, i \in I\}$ Überdeckung mit $\bigcup \mathring{U}_i = X$. Definieren

$$C_n(\mathfrak{U}) = C_n(X, \mathfrak{U}) = \langle \sigma \in C_n(X) \mid \exists i \text{ mit } \operatorname{Bild} \sigma \subset U_i \rangle$$

die Simplices mit Feinheit $\mathfrak{U}$.

Satz $\forall n$:

$$H_n(X) \cong H_n(X, \mathcal{U})$$

Bew. Betrachten die Inklusion

$$\begin{tikzcd}
C_n(X, \mathcal{U}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\partial"] & C_n(X) \arrow[d, "\partial"] \\
C_{n-1}(X, \mathcal{U}) \arrow[r, hook] & C_{n-1}(X)
\end{tikzcd}$$

.

Es genügt zu zeigen:

1) Jeder Zykel $z \in Z_n(X)$
ist homolog zu einem Zykel $\tilde{z} \in Z_n(\mathcal{U})$.

2) $z_1, z_2 \in Z_n(\mathcal{U}) \subset Z_n(X)$
homolog bzgl $B_n(X)$ dann gilt
schon $z_1 - z_2 \in B_n(\mathcal{U})$.

Wir zeigen: 1) $\exists N \in \mathbb{N}$

s.d.

$$U^N z \in Z_n(\mathcal{U}).$$

Nach Lemma 8.12 sind nämlich z und Uz homolog, also z und $U^N z$.

2) $z_1 - z_2 = \partial b^{\in Z_n(\mathcal{U})}$ mit $b \in B_n(X)$.

$$\partial(b - Ub) = \partial(\partial R + R\partial)b = \underbrace{R\partial b}_{C_n(\mathcal{U})}$$

$R\partial b \in C_{n+1}(\mathcal{U})$

$\Longrightarrow$ Können b durch

$$\underbrace{U_n b + R\partial b}_{\in C_{n+1}(\mathcal{U})} \text{ ersetzen.}$$

$\Longrightarrow$ Es reicht

$$U^N b \in C_{n+1}(\mathcal{U}) \text{ für } N \gg 0$$

zu zeigen.

Dann brauchen wir dass

$z \in Z_n(X)$ und $b \in C_{n+1}(X)$

eine Summe von endlich vielen Simplizes ist.

Der Rückzug der Überdeckung $\mathring{\mathcal{U}} = \{\mathring{U}_i\}$

von X auf die endlich vielen Δ_n

und Δ_{n+1} gibt offene Überdeckungen

von Δ_n und Δ_{n+1}.

Nun gilt für affine Simplizes

$$\operatorname{diam}([a_0,\dots,a_q]) = \max\{\|a_i - a_j\|\}$$

max diam Simplices von $U[a] \leq \frac{q}{q+1} \operatorname{diam}[a]$

(ungünstigste Fall $a_0, a_1 = a_2 = \dots = a_q$

).

Nach dem Lemma von Lebesgue $\exists N$ s.d.

alle Simplizes von $U^N z$, $U^N b$

Bilder von Teilsimplices von Δ_n bzw Δ_{n+1}

mit Durchmesser $< \varepsilon$, also in ein

Urbild $\Sigma^{-1}(\mathcal{U}_i)$ enthalten sind

$\square$

Def. X, A, $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ $\mathfrak{U} \cap A = \{U_i \cap A\}$

$$C_n(X, A; \mathfrak{U}) := C_n(X, \mathfrak{U}) / C_n(A, \mathfrak{U} \cap A).$$

8.14 Corollar $\mathfrak{U}$ Überdeckung mit $\bigcup \mathring{U}_i = X$

Dann gilt

$$H_n(X, A; \mathfrak{U}) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A)$$

vermöge der Inklusion $C_n(X, A, \mathfrak{U}) \hookrightarrow C_n(X, A)$.

Bew. Haben die kommutativen Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
H_n(A,\mathfrak{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n(X,\mathfrak{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n(X,A,\mathfrak{a}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(A,\mathfrak{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{n-1}(X,\mathfrak{a}) \arrow[d, "\cong"] \\
H_n(A) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X,A) \arrow[r] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & H_{n-1}(X).
\end{tikzcd}
$$

mit exakten Zeilen und den angedeuteten Isom. Das 5-Lemma läßt sich anwenden

5-Lemma Sei

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, two heads, "f"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g", "\cong"'] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "h"] & D \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "k", "\cong"'] & E \arrow[d, hook, "l"] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C' \arrow[r, "\gamma'"] & D' \arrow[r, "\delta'"] & E'
\end{tikzcd}$$

Kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen mit exakten Zeilen

zwei isos und Inj + surjektiv

Dann ist h ebenfalls ein Iso.

Beweis Diagramm jagd.

8.16. Beweis des Ausschneidungssatzes.

$$H^n(X,A) = H^n(X\setminus U, A\setminus U)$$

wenn $X \supset A \supset U$ mit $\mathring{A} \supset \overline{U}$.

Betrachten die Überdeckung $\mathfrak{U} = \{\mathring{A}, X\setminus U\}$

$\mathring{\mathfrak{U}} = \{\mathring{A}, X\setminus\overline{U}\}$ überdeckt.

$$C_q(A \setminus U) = C_q(X \setminus U) \cap C_q(A)$$

$$C_q(X, \mathcal{U}) = C_q(X \setminus U) + C_q(A) \subset C_q(X)$$

$$C_q(A, \mathcal{U}) = C_q(X, \mathcal{U}) \cap C_q(A) = C_q(A).$$

$$
\begin{tikzcd}
C_q(X \setminus U)/C_q(A \setminus U) \arrow[r, "j_q"] \arrow[dr, "i_q"'] & C_q(X,\mathfrak{U})/C_q(A,\mathfrak{U}) \arrow[d, "r_q"] \\
& C_q(X)/C_q(A)
\end{tikzcd}
$$

Nach dem Noetherschen Isomorphiesatz

$$\frac{C_q(X \setminus U)}{C_q(X \setminus U) \cap C_q(A)} \cong \frac{C_q(X \setminus U) + C_q(A)}{C_q(A)}$$

Also (j_q) gibt ein Isomorphismus von Kettenkomplexen.

und η_q ein Isom in der Homologie nach Cor. 8.14.

$$H_n(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{i_*} H_n(X, A)$$

ist ein Isom. $\square$