

X triangulierte kompakte Fläche $X \cong \mathbb{CP}^1$



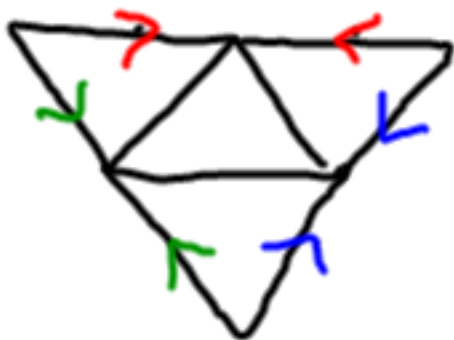
X orientierbar $\Leftrightarrow$ existiert
natürlich orientierung sämtlicher Dreiecke

$$\leadsto \exists z \in Z_2(L, \mathbb{Z}), B_2(L, \mathbb{Z}) = 0$$

$$\text{da } C_3(L) = 0 \leadsto H_2(L, \mathbb{Z}) \neq 0$$

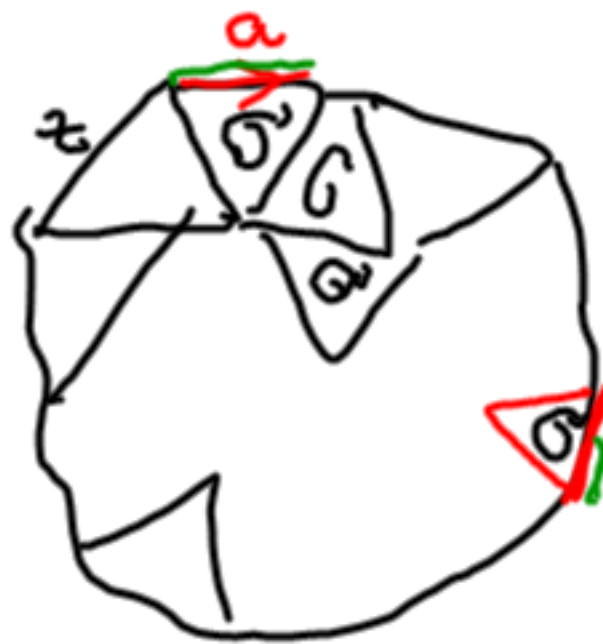


Triangulierung von S^2 .



X orientierbar, trianguliert,





trikugelante Polygon P
 und X entsteht aus
 P durch identifizierung
 von Seiten



Verkleben wird kodiert
 durch Wort $a, b, \dots, a^{-1}$

Jede Seite kommt genau 2x vor in umgekehrter
 Richtung durch laufen, wenn der Rand P einmal
 durch laufen

10.4 Satz. Sei X eine kompakte orientierbare
 triangulierte Fläche. Dann gilt
 entweder $X \cong S^2$ oder
 es gibt Polygon mit $4g$ Seiten in
 der Normalform



Bsp. $\begin{matrix} a_1 \\ \rightarrow \\ b_1 \\ \downarrow \\ a_1^{-1} \\ \leftarrow \\ b_1^{-1} \end{matrix} \Rightarrow X \cong \text{torus}$

Beweis. 1. Schritt: Wir betrachten eine Triangulierung und klappen diese zu einem Polygon in die Ebene auf. Das Polygon hat dann eine gerade Anzahl von Seiten, und da χ orientiert, kreuzt jeder Kante im Rand (aufgefasst als Teilmenge von ∂) 2χ auf mit umgekehrten Durchlaufenden.

Die Situation ist also durch den Wort

$a b \dots b^{-1} a^{-1} m^{-1} \dots z$ kodiert

2. Schritt. Zerschneiden und erneut

Zusammenkleben erlaubt uns das Wort in
die gewünschte Normal zu bringen;

1. Operation



$\rightsquigarrow$



$\rightsquigarrow$



$\rightsquigarrow$

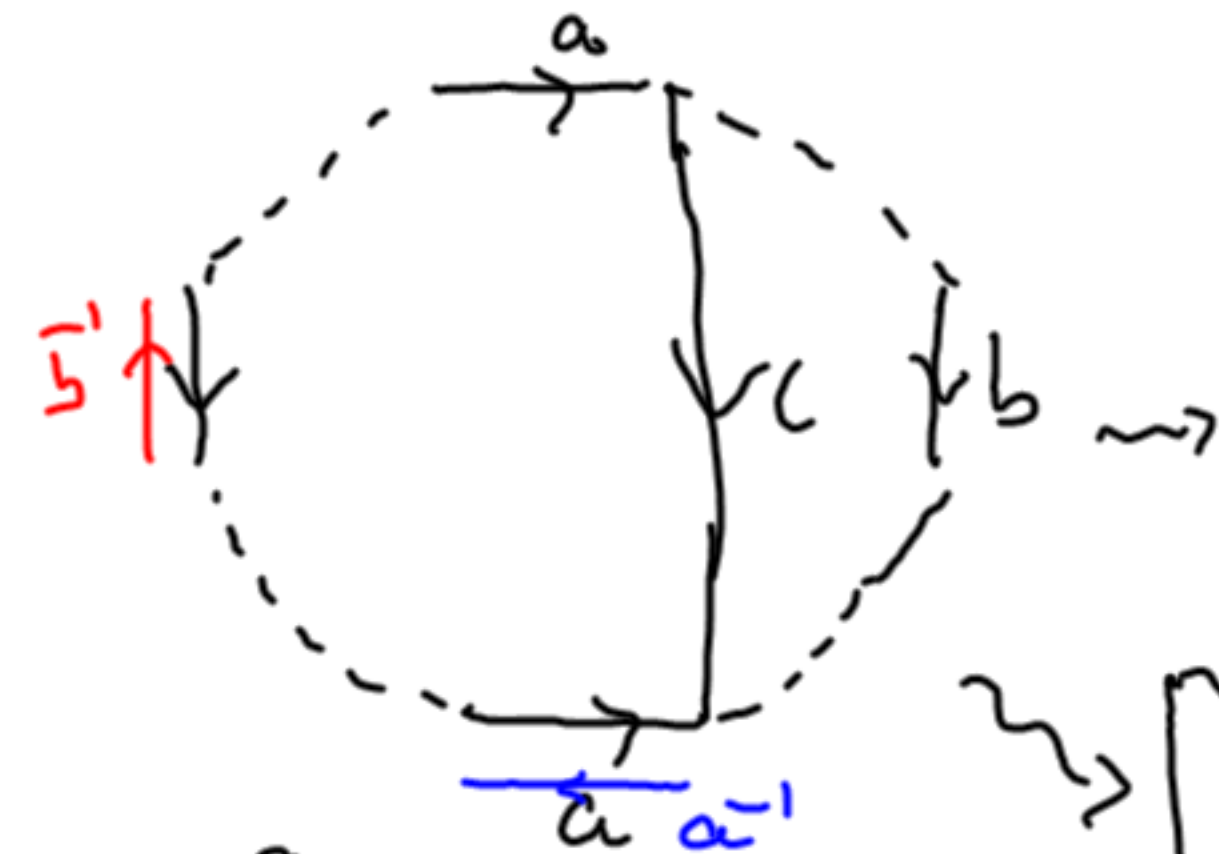


Dann können
wir
 $a \cdot a^{-1}$
in Wort.

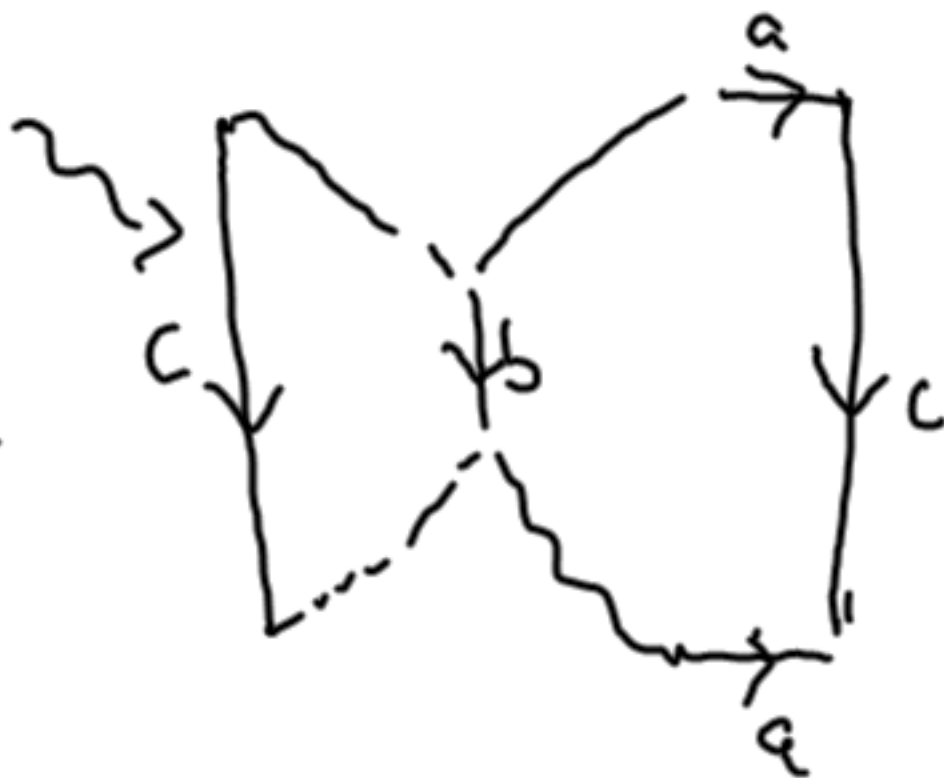
Nach endlich vielen Kürzungen

Operation 1. Erreichen wir die Situation
dass zwischen a und $\bar{a}'$ ein Randwert
in b liegt und $\bar{b}'$ außerhalb

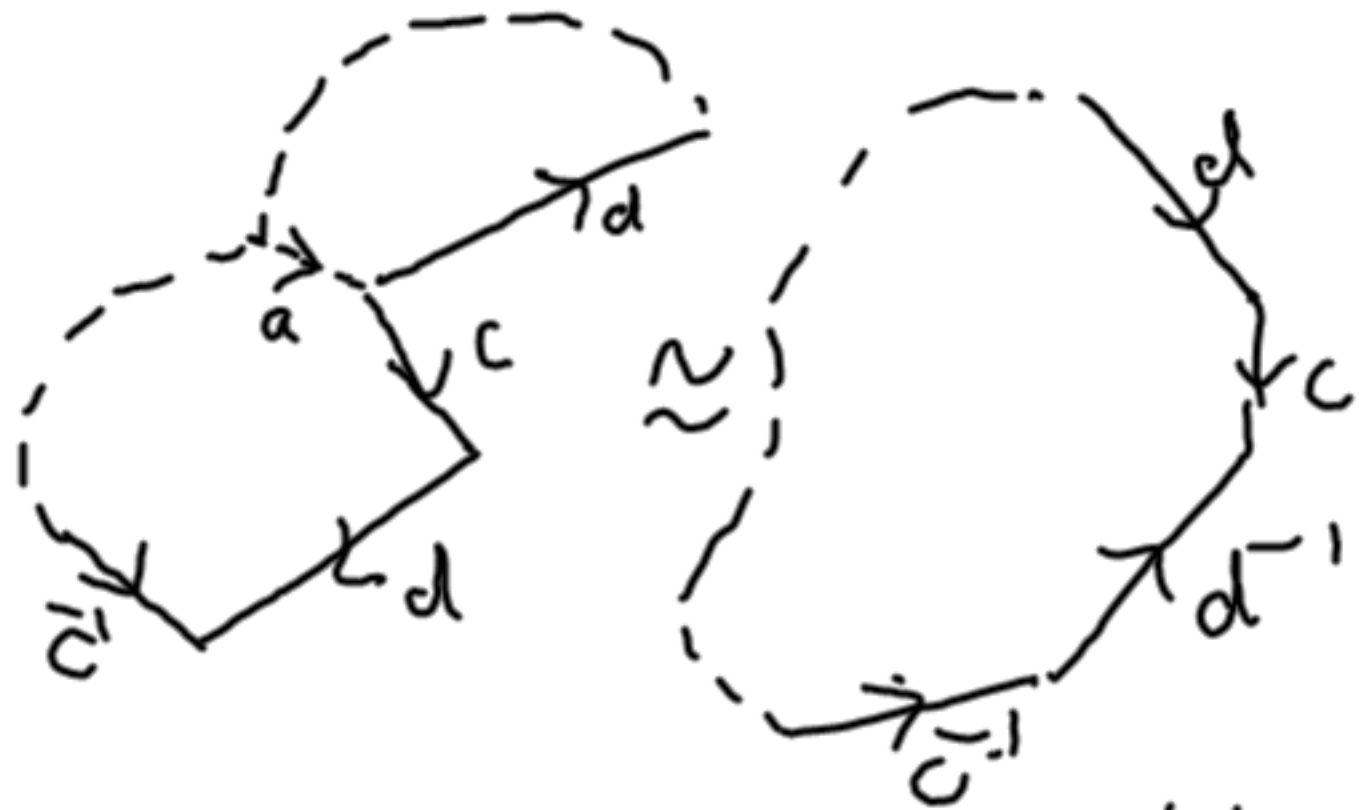
$$a \dots b \dots \bar{a}' \dots \bar{b}' \dots$$



$=$



~>



1 तरीक्या अवस्थेचें म. Op. 1, and 2. लिहूत

एकूच

$$a^{-1} \circ a = 1 \Rightarrow X \cong S^2$$

ओर

oder ein P mit $4g$ Seiten $g \geq 1$ der gen.
Art



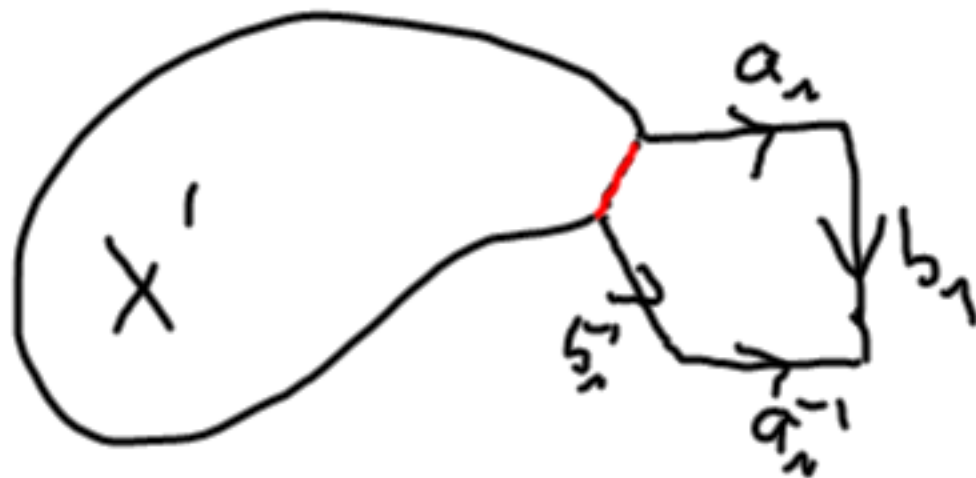
10.5 Großes Entsteht X aus einem
 $4g$ -gon. Dann ist

$X \cong X' \# T$ zusammenhängend Summe
wobei: X' aus einem $4(g-1)$ gon entsteht und

und T ein Torus ist.



Bew.



10.6 Cor. $X \cong \underbrace{T \# T \# \dots \# T}_{g\text{-copies}}$



10.7 Satz Entsteht K

aus einem $4g$ -gon in Normalform, dann gilt

$$1) \quad H_0(X) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(X) \cong \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_2(X) \cong \mathbb{Z}.$$

wobei die Basis von $H_1(X)$ durch die eingezeichneten Zyklen repräsentiert wird



2)

$$\pi_1(X) = \langle a_1, a_2, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle.$$

Bewei. Zunächst 2): Sticht von Kempen
angewandt auf X_1 das Innere des Polygons
und $X_2 = \text{Bild einer Kurve in Rand}$
liefert

$$X_1 \cap X_2 \xrightarrow[\text{homöom. d.}]{\sim} S^1$$



$$X_2 = \bigvee_{i=1}^{2g} S^1$$

ein Punkt vereinigen



$$X_1 \cong D \text{ Kreisscheibe}$$

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(X_1) = 0 & \\ \nearrow & \searrow & \nearrow \\ \pi_1(X_1 \cap X_2^*) \cong \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \pi_1(X) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \hookrightarrow \\ a_1, b_1, a_2, b_2, \dots \end{array}$$

$$\pi_1(X_2) = \langle a_{2g-1}, b_g \rangle \text{ freie Gruppe.}$$

1) Mayer-Vietoris liefert

$$0 \longrightarrow H_2(X)$$

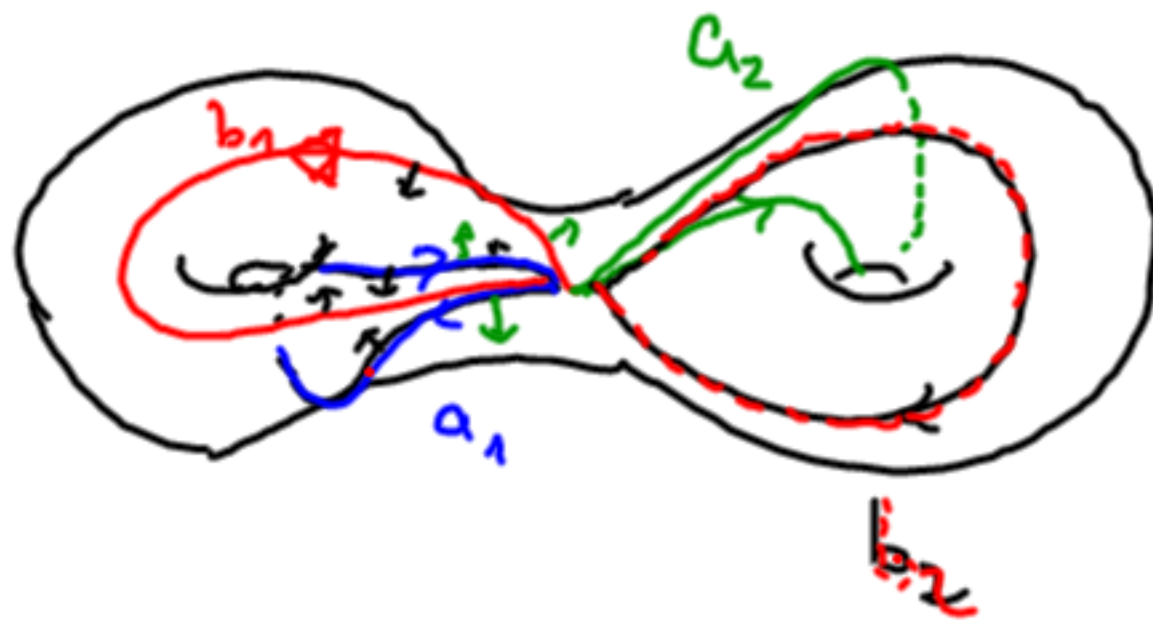
$$\hookrightarrow H_1(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{0} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \xrightarrow{\cong} H_1(X)$$

$\begin{matrix} \parallel \\ H_1(S^1) = \mathbb{Z} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ \mathbb{Z}^{2g} \end{matrix}$

$$\hookrightarrow H_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \xrightarrow{(\gamma, -1)} H_0(X) \rightarrow 0$$

$\begin{matrix} \parallel \\ \mathbb{Z} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ \mathbb{Z} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ \mathbb{Z} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ \mathbb{Z} \end{matrix}$

□



Der Zusatz folgt, da die angegebenen
Wege homolog zu den Wegen in Rand sind $\square$

Kap III Cohomologie

§ 11. Differentialformen

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = df.$$

Das Kalkül mit den dx_i kommt auch
sebst im Koordinatenwechsel.

Ein p -te Differentialform auf $U \subset \mathbb{R}^n$

$$\omega = \sum_{|I|=p} f_I dx_I$$

wobei $f_I \in C^\infty(U)$,

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

für $I = \{i_1 < \dots < i_p \leq n\}$,

$$\mathcal{P}(U) = \left\{ \omega = \sum f_I dx_I \right\}.$$

11.2. Def. Für $\omega \in \Omega^p(U)$ ist
die äußere Ableitung

$$d: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$$

wie folgt erklärt

1) $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$, dann

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

2) Für $\omega = \sum_I f_I dx_I \in \Omega^p(\mathcal{U})$

ist $d\omega := \sum_I df_I \wedge dx_I \in \Omega^{p+1}(\mathcal{U})$.

Bem.: 1) $d: \Omega^0(\mathcal{U}) = C^\infty(\mathcal{U}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{U})$

entspricht dem Gradienten,

2) $\Omega^{n-1}(\mathcal{U}) = \sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$

entspricht d der Divergenz div.

$$u \in \mathbb{R}^3$$

$$\Omega^1(u) \xrightarrow{d} \Omega^2(u)$$

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \mapsto d\omega$$

with

$$d\omega = g_1 dx_2 \wedge dx_3 + g_2 dx_1 \wedge dx_3$$

$$g_3 + dx_1 \wedge dx_2$$

$$\text{rot} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$