

§ 12. Integration von C^∞ -Formen.

12.1 Def. M C^∞ -Mfkt, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Eine $\mathcal{U}$ -untergeordnete Zerlegung der 1 ist eine Kollektion $\{p_\alpha\}_{\alpha \in J}$ von nicht negativen C^∞ -Funktionen s.d.

(1) Für jeden Punkt $p \in M$ $\exists$ Umgebung U s.d. nur endlich viele $p_\alpha|_U \neq 0$

$$(2) \sum_{\alpha \in J} p_\alpha = 1$$

- (3) Der Träger $\text{supp } S_\alpha = \overline{\{x \in M \mid S_\alpha(x) \neq 0\}}$
liegt in einer U_i etwa $i = i(\alpha)$, $\forall \alpha \in J$
- (4) $\text{supp } S_\alpha$ ist kompakt.

12.2. Satz. Zu jeder offenen Überdeckung
existiert eine Zerlegung der 1. $\square$

Ist M kompakt, dann kann J endlich
wählen.

12.2. Def. $M \subset^\infty M_{\text{flat}}$ heißt

minimales, wenn dafür $\mathcal{A} = \{\psi_i, \varphi_i\}$

gibt so dass Funktionaldeterminanten

von Übergangsfunktionen $\varphi_j \circ \bar{\varphi}_i: \varphi_i(\underbrace{\psi_i}_{V_i \subset \mathbb{R}^n}) \rightarrow \varphi_j(\underbrace{\psi_j}_{V_j})$

alle positiv sind.

Ist M minimal, dann gibt genau

zwei orientierte maximale Atlanten,

die mit $\mathcal{A}$ positiv verträgl. C^∞ -Karten, bzw.
die anderen.

Sei diein $M=n$, und $\omega \in \mathcal{L}^n(M)$
 mit kompakten Träger. Dann ist

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \int_{V_\alpha} (\varphi_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \omega)$$

für $dx_1 \dots dx_n$

$$= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \int_{V_\alpha} \underbrace{f_\alpha dx_1 \dots dx_n}_{\text{Lebesgue Maß}}$$

Wohldefiniert, wegen der Transform.-Formel

$$\int_V f dx_1 \dots dx_n = \int_W f \circ \varphi |\det D\varphi| dt_1 \dots dt_n$$

$\varphi: W \rightarrow V$, Koordinaten $t_1, \dots, t_n$ auf W .

$$\varphi^*(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = f \circ \varphi \cdot (\det D\varphi) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$$

desherib brauchen wir eine orientierte Mfgt. $\square$

12.3. Def.

Mitt mit Rand

ist ein top. Mannigfaltigkeit, so gibt
Punkt ein Umgebung hat die
form

homöomorph zu

$$(a) \quad V \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

oder

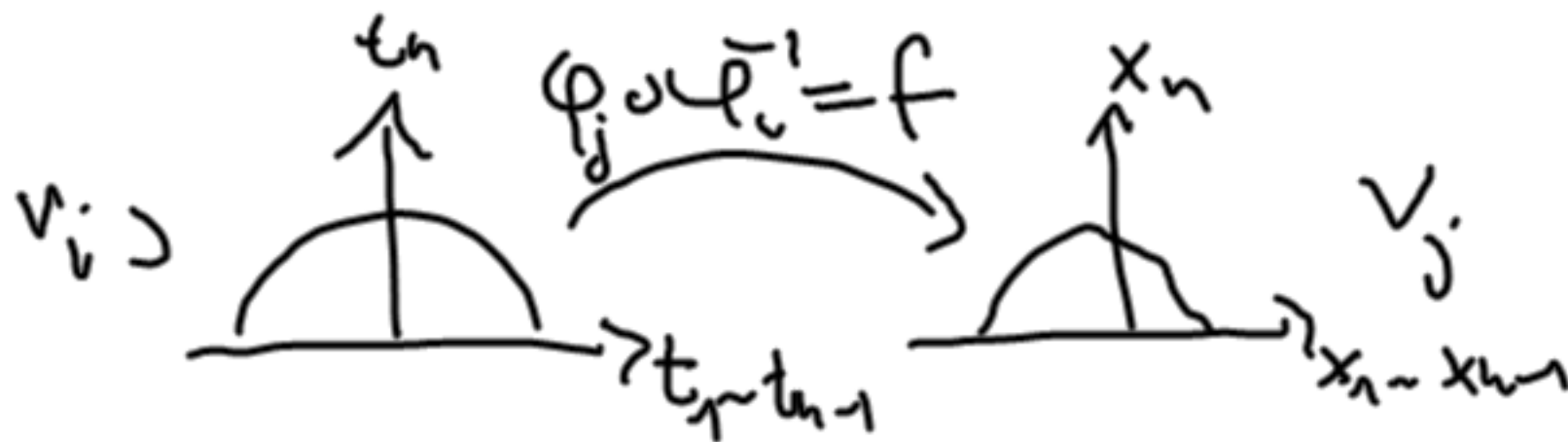
$$(b) \quad V \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ offen}$$



$p \in M$ von Typ (b) heißt Randpunkt

∂M ist eine $(n-1)$ -Mfht.

Ist M orientierbar, dann trägt ∂M eine natürliche Induzierte Orientierung.



$$f(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j} (t_1, \dots, t_{n-1}, 0) \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} \quad \dots \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial t_1} \end{array} & \begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial t_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial t_n} \end{array} \\ \hline 0 & \underbrace{\frac{\partial f_n}{\partial t_n}}_{>0} \end{array} \right)$$

$$(t_1, \dots, t_{n-1}, 0)$$

$$\Rightarrow \det \left(\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right) \geq 0$$

$$f_n(t_1, \dots, t_{n-1}, \varepsilon) > 0$$

12.4. Satz von Stokes.

M orientierte n -dim C^∞ -Mfkt mit Rand
 $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ mit kompakten Träger.

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Bew:

Im wesentlichen: Fubini + Hauptsatz $\square$

12.5 Beur. Die Bed. dass ∂M
glatt ist lässt sich abschwächen.

Sei $K \subset M$ eine Kompaktum mit
 $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ und ∂K glatt bis auf
eine $(n-1)$ -Nullmenge. Dann gilt

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega$$

M enthält $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$.



12.6 Satz Sei M eine C^∞ -Mkt.

Dann gilt

$$H^p(M) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p(M), \mathbb{R})$$

Inbesondere.

$$\dim H^p(M) = \operatorname{rk} H_p(M).$$

□

$$H^*(M) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(M) \quad \text{hat durch das}$$

1-Produkt nichtverschwindendes Ringstruktur.

12.7. Cohomologie mit hpt Träger.

$$\Omega_c^p(M) = \{ \omega \in \Omega^p(M) \mid \text{supp } \omega \text{ ist hpt} \}$$

$$0 \rightarrow \Omega_c^0(M) \rightarrow \Omega_c^1(M) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_c^n(M) \rightarrow 0$$

$$n = \dim M.$$

$$H_c^p(M) = H^p(\Omega_c^\bullet(M)).$$

n -dim M , orientiert,

$$\Omega_c^n(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto \int_M \omega.$$

Da

$$\Omega^p(M) \times \Omega_c^{n-p}(M) \longrightarrow \Omega_c^n(M)$$

induziert dies

$$H^p(M) \times H_c^{n-p}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

12.8 Satz (Poincaré Dualität), M orient., $\dim = n$

$$1) \quad H^p(M) \times H_c^{n-p}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$[\eta], [\omega] \longmapsto \int_M \eta \wedge \omega$$

die perfekte Paarung.

2) Ist M kompakt, orientiert, $\dim = n$

$$H^{n-p}(M) = (H^p(M))^*$$

Cor. M wie oben. in 2) $\operatorname{rk} H_p(X) = \operatorname{rk} H_{n-p}(X)$

Bem.: $N \subset M$ ein kompakter orientierter
 p -dim Unter Rfht

$$\Omega^p(M) \xrightarrow{\int} \mathbb{R}$$

Nach der Poincaré Dualität $\exists \eta \in \Omega_c^{n-p}(M)$
s.d.

$$\int_N \omega = \int_M \omega \wedge \eta \quad \forall \text{ geschl. } \omega \in \Omega^p(X).$$

Der Beweis von 12.6 erfolgt in 3. Schritten.

$$1) \quad H_*(M) \cong H_*^\infty(M).$$

Wir werden dies mit Mayer-Vietoris
Induktion zeigen.

2) Ist $\alpha \in C_p^\infty(M)$ C^∞ -Simplex
und $\omega \in \Omega^p(M)$, dann ist $\alpha^* \omega$

die p -form auf Δ_p welche Standardinhalt
Mßt mit f.a. glatter Rand $\partial \Delta_p$.

Ist $K \in C_p^\infty(M)$ eine Kette.

$$K = \sum_{\text{end.}} n_i z_i \in C_p^\infty(M)$$

Dann

$$\int_K \omega = \sum_i n_i \int_{\Delta_p} z_i^* \omega$$

Nach dem Satz von Stokes gilt für exakte
Formen $\omega = d\eta$

$$\int_K d\eta = \sum_i n_i \int_{\Delta_p} z_i^* d\eta = \sum_i n_i \int_{\Delta_p} d z_i^* \eta$$

$$= \sum n_i \int_{\partial \Delta_P} \omega_i^* \eta = \int_K \eta$$

Also Integration über Kette liefert.

$$\Omega^p(M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p^{\infty}(M), \mathbb{R})$$

$$\omega \longmapsto \left(k \longmapsto \int_k \omega \right)$$

Der Satz von Stokes sagt,

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^p(M) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(M), \mathbb{R}) & & \\
 \downarrow d & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 \Omega^{p+1}(M) & \longrightarrow & \text{Hom}(C_{p+1}^\infty(M), \mathbb{R}) & & \varphi \circ \partial
 \end{array}$$

commutative. D. is your desired Isom. which with

$$\begin{array}{ccc}
 H^p(M) & \xrightarrow{(2)} & H^p(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C^\infty(X), \mathbb{R})) \\
 & & \downarrow \Omega(3) \\
 & & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p^\infty(X), \mathbb{R})
 \end{array}$$

und (1) $H_p(M) = H_p^\infty(M)$.

(1)&(2) beweisen wir mit Mayer-Vietoris Incl.

(3) ist eine rein algebraische Aussage,
die in versuchter Form in der
Homologische Algebra viel verwendet
wird.

Zunächst 3)

12.10 Def. R ein Ring. Ein R -Modul

Q heißt nichttriv, wenn

$\nexists$ Diagramme

$\exists \beta$



s.d. das Diagramm kommutiert.

Äquivalent zu

$0 \rightarrow N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow 0$ kurz exakt

ist auch
exakt.

$0 \rightarrow \text{Hom}_R(N_2, Q) \rightarrow \text{Hom}_R(N_1, Q) \rightarrow \text{Hom}_R(N_0, Q) \rightarrow 0$

12.11. Lemma (Zorn) Sei Q in R -Modul

Q ist unendlich, genau, dann wenn

für alle Ideal $I \subset R$ alle

Homom $\alpha: I \rightarrow Q$ sich zu $\beta: R \rightarrow Q$

fortsetzen.

Beweis: Notwendigkeit ist klar.

Hinwendung:

$$\begin{array}{c} Q \\ \uparrow \\ 0 \rightarrow N_0 \rightarrow N_1 \end{array}$$

Beachten

$$\mathcal{W} = \left\{ (N', \alpha') \mid N_0 \subset N' \subset N_1 \right. \\ \left. \alpha': N' \rightarrow \mathbb{Q}, \alpha'|_{N_0} = \alpha \right\}$$

$$(N', \alpha') \leq (N'', \alpha'') \Leftrightarrow N' \subset N'', \alpha' = \alpha''|_{N'}$$

$\mathcal{W}$ ist partiell geordnet und jede Kette
beschränkt, durch

$$\bigcup_{N' \in K} N'$$

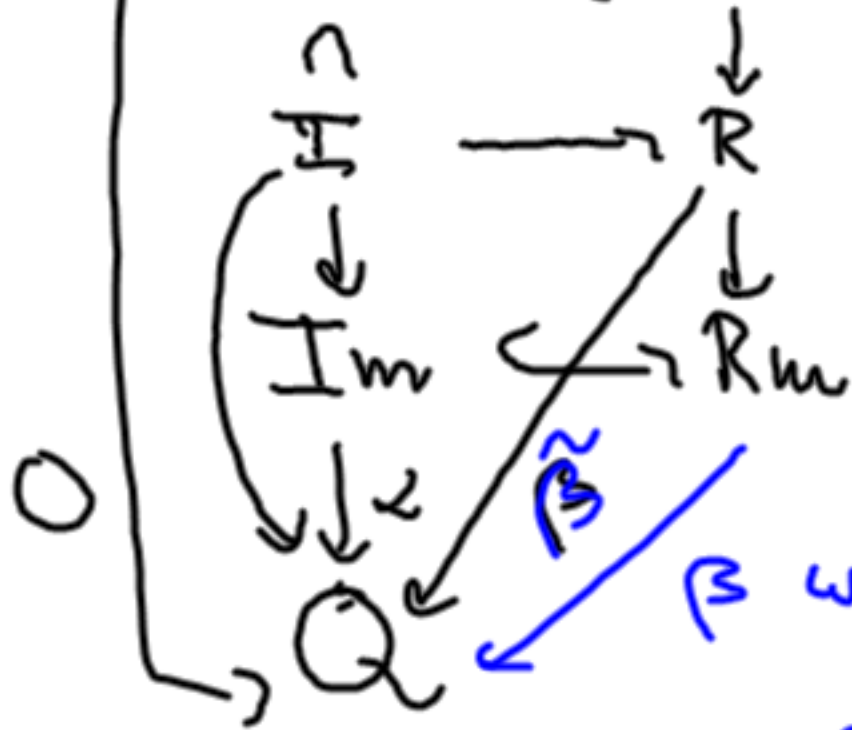
Nach dem Zornschen Lemma $\exists$ maximales
Element

$$(N, \alpha) \quad , \quad \alpha|_N = \alpha_0$$

Wir zeigen $N = N_1$. Ang. nicht
etwas $m \in N_1 \setminus N$. Beh. $N'' = N + Rm$
Nach dem Isom. Satz gilt

$$N''/N = R \cdot m / N \cap mR \cong R/I$$

wobei $I = \{ r \in \mathbb{R} \mid r \cdot m \in \mathbb{N} \}$.

$$\text{Ann}(m) = \{ r \in R \mid r \cdot m = 0 \} = \ker(R \rightarrow Rm).$$


β nach Vor.

↳ wohlchint, da

$$A_m(m) \rightarrow Im \rightarrow Q$$

Also $N'' = N + mR \xrightarrow{\alpha''} Q$, $\alpha''|_N = \alpha$, $\alpha''|_{mR} = \beta$.

Ger. Ein $\mathbb{Z}$ -Modul Q ist invertierbar genau dann, wenn jeder Element $q \in Q$ bzgl. teilbar ist, d.h. $\exists n \in \mathbb{Z}, \exists q'$ mit $nq' = q$.

Bew.

$$\begin{array}{ccc}
 I = (n) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z} \\
 \downarrow \cdot n & & \swarrow 1 \\
 Q & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}
 \end{array}$$

$q' = nq'$

Zu 3.

R ist ein invertierbares $\mathbb{Z}$ -Modul.

$$H^p \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{R}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p(C), \mathbb{R})$$

durch Zerlegung des Komplex

$$0 \rightarrow Z_p \rightarrow C_p \rightarrow B_{p-1} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow B_p \rightarrow Z_p \rightarrow H_p \rightarrow 0$$

und Anwendung des "exakten" Funktors

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{R})$$

□