12.9. Mayer-Vietoris für Cohomologie.

M C^∞-Mfkt, $M = U \cup V$ offen,

Einschränken (= Rückzug von Inklusion)

$$0 \longrightarrow \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \longrightarrow \Omega^p(U \cap V) \longrightarrow 0$$

$$\omega \longmapsto (\omega|_U, \omega|_V)$$

$$(\eta_1, \eta_2) \longmapsto (\eta_1 - \eta_2)|_{U \cap V}$$

Nur die Surjektivität ist nicht offensichtlich.

Betrachten wir $\{\mathcal{U}, V\}$ untergeordnete Teilung der $\underline{1} = \sum_{\alpha \in J} \rho_\alpha$

und Zerl.

$$J = J_u \,\dot{\cup}\, J_v$$

sodass $\operatorname{supp} \rho_\alpha \subset \mathcal{U} \quad \forall \alpha \in J_u$, analog

$$\operatorname{supp} \rho_\alpha \subset V \quad \forall \alpha \in J_v .$$

Sehen $\rho_u = \sum_{\alpha \in J_u} \rho_\alpha$, $\rho_v = \sum_{\alpha \in J_v} \rho_\alpha$

$$\rho_U\big|_{M\setminus U} \equiv 0 \qquad \rho_V\big|_{M\setminus V} \equiv 0$$

Zu $\eta \in \Omega^p(U \cap V)$ setzen wir

$$\eta_U = \begin{cases} \rho_V \eta & \text{auf } U \cap V \\ 0 & U \setminus V \end{cases}$$

$$\eta_V = \begin{cases} -\rho_U \eta & U \cap V \\ 0 & V \setminus U \end{cases}$$

Dann $\eta_U - \eta_V = \rho_V \eta + \rho_U \eta = (\underbrace{\rho_U + \rho_V}_{=1})\eta = \eta$.

Die zugeh. lange Cohomologie seq.

$$\cdots \to H^p(M) \to H^p(U) \oplus H^p(V) \to H^p(U \cap V) \to H^{p+1}(M) \to \cdots$$

12.10 Cohomologie von $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \underset{}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n$$

$$(x,t) \longmapsto x$$

$$(x,0) \longleftarrow\!\shortmid \; x$$

Für Formen

$$\Omega^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \underset{s^*}{\overset{\pi^*}{\rightleftarrows}} \Omega^p(\mathbb{R}^n)$$

Da $\pi \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow s^* \circ \pi^* = \mathrm{id}_{\Omega(\mathbb{R}^n)}$.

Wir zeigen, $\mathrm{id}_{\Omega^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})}$ und $\pi^* \circ s^*$

homotop sind.

Gesucht sind Abb.

$$K_p : \Omega^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

So dass

$$\mathrm{id} - \pi^* \circ s^* = \pm \left(d \circ K_p - K_{p+1} d \right)$$

Jede Form auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit Koord. (x,t) läßt sich als Summe von zwei Typen darstellen:

1) $f(x,t)\,\pi^*\varphi$ $\qquad \varphi \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$

2) $f(x,t)\,\pi^*\varphi \wedge dt$ $\qquad \varphi \in \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^n)$

indem wir nach dt Anteil sortieren

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Setzen K für Formen vom Typ 1

(1) $\quad K: f(x,t)\,\pi^*\varphi \longmapsto 0$

(2) $\quad f(x,t)\,\pi^*\varphi \wedge dt \longmapsto \pi^*\varphi \int_0^t f(x,t)\,dt$

K tuts:

$$\omega = f(x,t)\,\pi^*\varphi \quad \text{Typ } 1.$$

$$(1-\pi^* s^*)\,\omega = f(x,t)\,\pi^*\varphi - f(x,0)\,\pi^*\varphi .$$

$$(dk - kd)\,\omega = 0 - k\,d\omega =$$

$$-k\left[(d\,\pi^*\varphi)\cdot f(x,t) - df \wedge \pi^*\varphi\right]$$

$$= (-1)^{p-1} K(\pi^*\varphi \wedge df) = (-1)^{p-1}\,\pi^*\varphi \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt$$

$$= (-1)^{p-1} \pi^* \varphi \left(f(x,t) - f(x,0) \right).$$

$$= (-1)^{p-1} \cdot (1 - \pi^* s^*) \omega .$$

ω vom Typ 2.

$$\omega = f \, \pi^* \varphi \wedge dt .$$

$$d\omega = df \wedge \pi^* \varphi \wedge dt + f (d\pi^* \varphi) \wedge dt$$

$(1 - \pi^* s^*) \omega = \omega - 0$ da $s^* dt = d s^* t$
$= d0 = 0$.

$$K\,d\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge \pi^*\varphi \cdot \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dt$$

$$+\,\cancel{d(\pi^*\varphi)\int_0^t} f\,dt \,.$$

$$d K \omega = d\left(\pi^*\varphi \int_0^t f\,dt \right)$$

$$= \cancel{(d\,\pi^*\varphi)\cdot \int_0^t} f\,dt + (-1)^{p-1}\,\pi^*\varphi\, d\left(\int_0^t f\,dt \right)$$

$$= \cancel{} + (-1)^{p-1} \pi^* \varphi \wedge f \, dt$$

$$+ \cancel{(-1)^{p-1} \pi^* \varphi \cdot \int_0^1 d_x f \, dt}$$

$$= (-1)^{p-1} \omega + \cancel{} + \cancel{}$$

$$(1 - \pi^* s^*)\omega = (-1)^{p-1}(dK - Kd)\omega$$

Cor 12.11 Die induzierten Abbildg

$$H^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \underset{s^*}{\overset{\pi^*}{\rightleftarrows}} H^p(\mathbb{R}^n)$$

sind zueinander inverse Isom.

<u>Cor. 12.12</u> (Poincaré sche Lemma)

$$H^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & p=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

Beweis von Satz 12.6.

$$H^p(M) \longrightarrow H^p \operatorname{Hom}(\Sigma_\cdot^\infty(M), \mathbb{R}) \cong \operatorname{Hom}(H_p^\infty M, \mathbb{R})$$

a) <u>Ziel ist die Aussage</u>

$$T(M): \quad H^p(M) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}(H_p^\infty(M), \mathbb{R}) \quad \forall p.$$

für alle C^∞-Mfkt zu zeigen.

Beh. 1 $U, V \subset M$ offen, $M = U \cup V$

Dann gilt

$$T(U), T(V), T(U \cap V) \Longrightarrow T(M).$$

Bew. Wir haben Mayer-Vietoris auch für C^∞-Ketten, da Ausschneiden mit baryzentrischer Unterteilung in C^∞-Version bleibt. Sie lautet:

$$H_p^\infty(U \cap V) \longrightarrow H_p^\infty U + H_p^\infty(V) \longrightarrow H_p^\infty(U \cup V)$$

$$\longrightarrow H_{p-1}^\infty(U \cap V)$$

$\mathrm{Hom}(\ ,\mathbb{R})$ dreht die Pfeile um, und läßt sie exakt. Wir erhalten:

$$
\begin{tikzcd}
H^{\infty}_p(U\cap V)^* & H^{\infty}_p U^* + H^{\infty}_p V^* \arrow[l] & (H^{\infty}_p M)^* \arrow[l] & H^{\infty}_{p-1}(U\cap V)^* \arrow[l] & H^{\infty}_{p-1}(\;)^* + H^{\infty}_{p-1}(\arrow[l] \\
H^p U\cap V \arrow[u, "\cong"'] & H^p U + H^p(V) \arrow[l] \arrow[u, "\cong"'] & H^p(M) \arrow[l] \arrow[u, "\cong"'] & H^{p-1} U\cap V \arrow[l] \arrow[u, "\cong"'] & H^{p-1}U + H^{p-1}V \arrow[l] \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}
$$

5 Lemma $\Longrightarrow$ $\cong$

2. Beh. $T(U)$ ist gültig für offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ mit U C^∞-diff. zu $\mathbb{R}^n$.

(z.B. U offener Quader)

Klar
$$H_p^\infty(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

da $\mathbb{R}^n \underset{C^\infty\text{-homotop}}{\simeq} \{0\}$. Also

$$H^p(\mathcal{U}) = \begin{cases} \mathbb{R} & p=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(H_p^\infty \mathcal{U}, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & p=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\square$

<u>Beh 3.</u> Sei $M = \dot{\bigcup}_\alpha M_\alpha$

disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen.

Dann gilt

$$T(M_\alpha)\ \forall \alpha \Rightarrow T(M).$$

Bew $H_p^\infty(\dot\bigcup M_\alpha) = \bigoplus_\alpha H_p^\infty(M_\alpha)$.

da jede Kette in nur endlich vielen M_α Träger hat. Also

$$\mathrm{Hom}\Big(\bigoplus H_p(M_\alpha), \mathbb{R}\Big) = \prod_\alpha \mathrm{Hom}\big(H_p(M_\alpha), \mathbb{R}\big)$$

da ein Hom. auf direkte Summe durch Homomorphismen auf jede Summanden gegeben ist.

$$\underset{\text{Vw 3.}}{\cong} \prod_\alpha H^p(M_\alpha) = H^p(\bigcup M_\alpha)$$

da eine Form auf einer disjunkten Vereinigung von offenen, durch eine Form auf jeder offenen Menge gegeben ist. $\square$

<u>Beh.</u> 1), 2), 3) $\Longrightarrow$ Satz.

Zunächst für $M \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Dann wählen wir eine Ausschöpfung durch Kompakta $K_0 \subset \mathring{K}_1 \subset K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset \ldots$

K_i etwa endliche Vereinigung von kompakten Quadern mit rationalen Ecken, Weiter eine Folge $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_m \subset \dots$

von endl. Ver. von offenen Quadern sodass

$$K_1 \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset \mathring{K}_2$$

U_2 überdeckt $K_2 \setminus \mathring{K}_1$, $\overline{U_2} \subset K_3$

U_i überdecke $K_i \setminus \mathring{K}_{i-1}$, $\overline{U_i} \subset \mathring{K}_{i+1} \setminus \overline{U_{i-2}}$

Schließlich

$$U = \dot{\bigcup_{i \equiv 0 \bmod 2}} U_i \qquad V = \dot{\bigcup_{i \equiv 1 \bmod 2}} U_i$$

sind disjunkt. Der Durchschnitt

$$U \cap V = \dot{\bigcup_{i=0}^{\infty}} U_i \cap U_{i+1}$$

ebenfalls disjunkt.

Die U_i's und $U_i \cap U_{i+1}$

sind endliche Vereinigungen von offenen Quadern.
Mit Induktion über die Anzahl der
Quader folgt $T(U_i)$, $T(U_i \cap U_{i+1})$
mit Mayer-Vietoris.

$\Rightarrow T(U), T(V), T(U \cap V)$ folgt
mit Beh 3 $\Rightarrow$ Beh 1 $\Rightarrow T(M)$.

Damit ist die Aussage für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen gezeigt.

Für beliebige M betrachten wir eine Ausschöpfung durch Kompakta und offene U_i, die endl. Vereinigungen von Kartengebieten sind.

~~Mayer~~-Vietoris induktion $\Longrightarrow T(M)$.

Bleibt

$$H_p^\infty(M) \cong H_p(M) \quad \forall p \ \forall M$$ zu zeigen.

Die gleiche Mayer-Vietoris Induktion greift.

§13. Zur Poincaré Dualität.

$\wedge$ Produkt und Integration

$$\Omega^p(M) \times \Omega_c^{n-p}(M) \longrightarrow \Omega_c^n(M) \xrightarrow{\int} \mathbb{R}$$

gibt eine Paarung für M orientierbar Dimension $= n$. Dies induziert

$$H^p(M) \times H_c^{n-p}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Wir wollen zeigen, diese Paarung ist perfekt, also

$$H^p(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_c^{n-p}(M), \mathbb{R})$$

ist ein Isom. $\forall p$ $\forall M$.

13.2. Mayer-Vietoris für Coh. mit kpt Träger.

U, V offen $U \cup V = M$

$$0 \longrightarrow \Omega_c^p(U \cap V) \longrightarrow \Omega_c^p(U) \oplus \Omega_c^p(V) \longrightarrow \Omega_c^p(M) \to 0$$

Nur die Surjektivität ist nicht unmittelbar klar.

$\omega \in \Omega^p_c(M)$, ρ_U, ρ_V wie oben.

$$\omega = \underset{\substack{\cap \\ \Omega^p_c U}}{\rho_U \omega} + \underset{\substack{\cap \\ \Omega^p_c(V)}}{\rho_V \omega} \quad \text{liegt im Bild.}$$

Lange ex. Seq.

$$\to H^p_c(U \cap V) \to H^p_c(U) \oplus H^p_c(V) \to H^p_c(U \cup V) \to H^{p+1}_c(U \cap V) \to$$

Hom(, $\mathbb{R}$) anwenden dreht die Pfeile um, bleibt exakt.

$$\cdots \longleftarrow H^p_c(M)$$

$$H^{p+1}_c(M)^* \longleftarrow \cdots$$

Mit Mayer-Vietoris hinleichten sehen es reicht die Aussage für $\mathbb{R}^n$ zu zeigen.

Cohomologie mit kpt Träger in $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$$

$$\pi^*\Omega^p_c(\mathbb{R}^n) \subset \Omega^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}), \not\subset \Omega^p_c(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$$

$$\omega = f(x,t)\,dt\wedge\varphi + g(x,t)\psi$$

mit $\varphi,\psi\in\pi^*\Omega^*(\mathbb{R}^n)$, $f,g\in C^\infty_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.

$$\pi_*: \Omega^{p}_{c}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n}) \longrightarrow \Omega^{p-1}_{c}(\mathbb{R}^{n}).$$

$$\pi_*\omega := \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dt\right)\varphi \in \Omega^{p-1}_{c}(\mathbb{R}^{n}).$$

und

$$e: \Omega^{p-1}_{c}(\mathbb{R}^{n}) \longrightarrow \Omega^{p}_{c}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n}).$$

$$\varphi \longmapsto \rho(t)\,dt\wedge\varphi$$

wobei $\rho\in C^{\infty}_{c}(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t)\,dt = 1$

Dann gilt:

a) $\quad d\pi_* = \pi_* d$

b) $\quad de = ed$

c) $\quad \pi_* \circ e = \mathrm{id}_{\Omega_c^\cdot(\mathbb{R}^n)}$.

<u>Beh.</u>

$$\mathrm{id}_{\Omega^*(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \quad \text{und} \quad e\circ\pi_*$$

sind homotop.

Cor. 1) $H^p_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \cong H^{p-1}_c(\mathbb{R}^n)$

2) $$H^p_c(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & p<n \\ \mathbb{R} & p=n. \end{cases}$$

3) $[\rho(x_1)dx_1\wedge \dots \wedge \rho(x_n)dx_n]$ generat. $H^n_c(\mathbb{R}^n)$.

Die Homotopie ist (bis auf Vorzeichen)

$$K : \Omega^{p}_{c}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n}) \longrightarrow \Omega^{p-1}_{c}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n})$$

$$K\omega = \int_{-\infty}^{t} f\,dt\,\varphi - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f\,dt\right) A(t)\,\varphi$$

wobei $A(t) = \int_{-\infty}^{t} \rho(t)\,dt$. $\square$