· Ψ surjektiv: Sei $f \in \prod_{i\in I} V_i^*$. Dann ist $p_i(f) = f_i \in V_i^*$ $\forall i$

Also haben wir eine Abbildungen f_i

$$f \in \left(\bigoplus V_i\right)^* \qquad \begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{u_i} & \bigoplus V_i \\ & {\scriptstyle f_i}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & K & \end{array} \qquad \Rightarrow \exists \bigoplus V_i \xrightarrow{f} K$$

Zeigen: $\Psi(f) = f$. Für die Differenz $\Psi(f) - f$ gilt

$$p_i(\Psi(f) - f) = p_i(\Psi(f)) - p_i(f)$$
$$= u_i^*(f) - f_i = f \circ u_i - f_i = f_i - f_i = 0 \quad \square$$

5.5 Bemerkung: Ist $V_i = V$ $\forall i \in I$, dann sind die Notationen $V^I = \prod_{i\in I} V$ und $V^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} V$ gebräuchlich.

5.6 Definition: Für einen Ring R heißt ein Modul M frei, wenn $M \cong \bigoplus_{i\in I} R = R^{(I)}$

Beispiele: 1) Jeder Modul (endlichdimensionale) über K Körper ist frei. $V \cong K^n$

2) Mit tieferliegenden Methoden der Mengenlehre kann man zeigen: Jeder K-Vektorraum V ist frei. $V \cong K^{(I)}$

3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist kein freier $\mathbb{Z}$-Modul.

5.7 Satz: R beliebiger Ring, M beliebiger R-Modul, dann ist M ein Quotient eines freien Moduls:
$M \cong R^{(I)}/U$. $\qquad U \subset R^{(I)}$

Beweis: Betrachten zu $m \in M$ die Abbildung
$f_m: R \to M$, $r \mapsto r \cdot m$
$\Rightarrow \exists$ Abbildung $R^{(M)} \xrightarrow{f} M$ surjektiv
Nehmen $U = \ker f$ und wenden Homomorphiesatz an.

5.8 Notation: R Ring, I Indexmenge, dann ist
$F \in R^{(I)}$ freier R-Modul
$u_i: R \to R^{(I)}$, $i \in I$.
Häufig verwendet man die Notation
$e_i = u_i(1) \in R^{(I)}$. Jedes Element $v \in F$ hat dann eine eindeutige Darstellung $v = \sum_{i\in J} \lambda_i e_i$ wobei $J \subset I$ endliche Teilmenge und $\lambda_i \in R$.
Man nennt $(e_i)_{i\in I}$ die Standardbasis von $F = R^{(I)}$

Ein R-Modulhomomorphismus $f: F \to M$ ist durch die Angabe der Bilder $m_i = f(e_i)$ und R-lineare Fortsetzung eindeutig bestimmt.

$$f(\sum_{\text{endlich}} \lambda_i e_i) = \sum_{\text{endl.}} \lambda f(e_i)$$

Beispiel: $e_i^*: F \to R$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Dann gilt

$$R \xrightarrow{u_j} R^{(I)} \xrightarrow{e_i^*} R$$

$$e_i^* \circ u_j = \delta_{ij}\, id_R$$

6) Das Tensorprodukt

6.1 ~~Definition~~: K Ring, V, W, X K-Moduln

Eine Abbildung $f: V \times W \to X$ $(v,w) \mapsto f(v,w)$ heißt K-bilinear, wenn $\forall \lambda \in K$, $\forall v, v_1, v_2 \in V$ $\forall w, w_1, w_2 \in W$ die Gleichungen

(1) $f(\lambda v, w) = \lambda f(v,w)$

(2) $f(v, \lambda w) = \lambda f(v,w)$

(3) $f(v_1+v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w)$

(4) $f(v, w_1+w_2) = f(v, w_1) + f(v, w_2)$

Mit anderen Worten: $\forall w \in W$ ist

$f_w: V \to X$, $v \mapsto f(v,w)$ linear.

$f_v: W \to X$, $w \mapsto f(v,w)$ linear.

Mit $Bil(V, W; X)$ bezeichnen wir die Menge der bilinearen Abbildung. Diese Menge trägt die Struktur eines R-Moduls

$$(\lambda f)(v,w) = \lambda f(v,w)$$

$$(f_1+f_2)(v,w) = f_1(v,w) + f_2(v,w)$$

6.2. Beispiele: 1) K Körper, V K-Vektorraum, V^* Dualraum

$$V^* \times V \to K \quad (f,v) \mapsto f(v) \text{ ist bilinear.}$$

2) U, V, W K-Moduln

$$Hom(U,V) \times Hom(V,W) \to Hom(U,W)$$

$$(f,g) \longmapsto g \circ f \text{ ist bilinear.}$$

3) V, W K-Vektorräume, $f \in Hom(V,K) = V^*$

$\varphi \in Hom(W,K)$ lineare Funktionen auf V bzw. W.

Dann erhalten wir eine Funktion auf $V \times W$

$$V \times W \to K \quad (v,w) \longmapsto f(v)\varphi(w)$$

Diese ist bilinear.

Im vergangenen Semester haben wir die Theorie der linearen Abbildung entwickelt. Nun wollen wir bilineare und später multilineare Abbildungen studieren.

Mithilfe des Tensorproduktes "$V \otimes W$" lassen sich beliebige bilineare Abbildungen $V \times W \to X$ mit einer einzigen bilinearen Abbildung $\tau : V \times W \to V \otimes W$ und linearen Abbildungen $V \otimes W \to X$ beschreiben.
Die Konstruktion des Tensorproduktes wird nicht einfacher, wenn wir uns auf Körper K und K-Vektorräume beschränken.

6.3. Definition: K Ring, V, W K-Moduln
Ein Tensorprodukt von V und W ist ein K-Modul T zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\tau : V \times W \to T$, die folgende universelle Eigenschaft hat:
Für alle bilinearen Abbildungen $\varphi : V \times W \to X$ in ein K-Modul X gibt es genau eine K-lineare Abbildung $\Phi : T \to X$, sodass das Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & T \arrow[d, "\Phi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Solch ein Paar (T, τ) leistet, was wir wollen.

$$\mathrm{Bil}(V, W; X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(T, X) \qquad \varphi \mapsto \Phi \quad \text{bzw. } \Phi \circ \tau \leftarrow\!\shortmid \Phi$$

sind isomorph.

6.4. Satz: Das Tensorprodukt von V und W ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis: (typisch für universelle Eigenschaften)
Seien (T, τ) und (T', τ') zwei Tensorprodukte.
Die universelle Eigenschaft von (T, τ) gibt einen Homomorphismus

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & T \arrow[d, shift left, "\Phi"] \\ & T' \arrow[u, shift left, "\Phi'"] \end{tikzcd}$$

Analog bekommen wir
$\Phi' : T' \to T$

Es folgt:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau"'] & T \arrow[d, "\Phi' \circ \Phi"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Wegen der Eindeutigkeit muss $\Phi' \circ \Phi = id_T$

Ebenso $\Phi \circ \Phi' = id_{T'}$

$\Rightarrow$ Also Φ und Φ' sind zueinander inverse kanonisch gegebene Isomorphismen. Man spricht daher auch von dem Tensorprodukt.

6.5. Satz: Für alle K-Moduln V, W existiert das Tensorprodukt.

Beweis: Da das Tensorprodukt bis auf kanonische Isomorphie eindeutig ist, liefert jede Konstruktion das gleiche. Wir wählen eine relativ abstrakte Konstruktion.

Wir betrachten die Indexmenge $I = V\times W$ und den freien Modul $K^{(V\times W)} = \bigoplus_{(v,w)} K$ Basis $e_{(v,w)}$

Die natürliche Abbildung $V\times W \to K^{(V\times W)}$
$(v,w) \overset{f}{\longmapsto} e_{(v,w)}$ ist nicht bilinear:

$$f(\lambda v, w) = e_{(\lambda v,w)} \neq \lambda e_{(v,w)} = \lambda f(v,w)$$

Sei $U\subset K^{(V\times W)}$ der Untermodul, der von allen Elementen der Gestalt $e_{(\lambda v,w)} - \lambda e_{(v,w)}$, $e_{(v,\lambda w)} - \lambda e_{(v,w)}$,
$e_{(v_1+v_2,w)} - e_{(v_1,w)} - e_{(v_2,w)}$, $e_{(v,w_1+w_2)} - e_{(v,w_1)} - e_{(v,w_2)}$
erzeugt wird, wobei $\forall \lambda\in K$ $\forall v,v_1,v_2\in V$, $\forall w,w_1,w_2\in W$

Wir definieren $T := K^{(V\times W)}/U$ Die Komposition von f mit der kanonischen Projektion

$p: K^{(V\times W)} \to K^{(V\times W)}/U$ gibt eine Abbildung $\tau: V\times W \to T$

τ ist bilinear.

$\tau(\lambda v, w) = e_{(\lambda v,w)} + U = \lambda e_{(v,w)} + U$
da $e_{(\lambda v,w)} - \lambda e_{(v,w)} \in U$, usw.

Wir zeigen nun, dass (T,τ) die gewünschte universelle Eigenschaft hat.

Sei $\varphi: V\times W \to X$ eine beliebige bilineare Abbildung.

$$\begin{tikzcd} & K^{(V\times W)} \arrow[d, "p"] \arrow[dd, bend left, "\Phi_0"] \\ V\times W \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & T \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} e_{(v,w)} \\ \downarrow \\ X \ni \varphi(v,w) \end{array}$$

Durch $e_{(v,w)} \mapsto \varphi(v,w) \in X$ und K-lineare Fortsetzung erhalten wir einen K-Modul-Homomorphismus

$\Phi_0: K^{(V\times W)} \to X$

welcher eindeutig bestimmt ist, wenn wir fordern, dass das Diagramm kommutiert. Da φ bilinear ist, gilt $U\subset \ker \Phi_0$

z.B. $\Phi_0(e_{(\lambda v,w)} - \lambda e_{(v,w)}) = \Phi(e_{(\lambda v,w)}) - \lambda \Phi_0(e_{(v,w)})$
$= \varphi(\lambda v,w) - \lambda\varphi(v,w) = \lambda\varphi(v,w) - \lambda\varphi(v,w) = 0$

Also induziert Φ_0 eine wohldefinierte eindeutig bestimmte K-lineare Abbildung $\Phi: T\to X$, $\Phi(e_{(v,w)} + U) = \varphi(v,w)$
sodass

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "\Phi"] \\ V\times W \arrow[ur] \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

kommutiert.

6.6. Notation: Wir bezeichnen das Tensorprodukt wie üblich mit $V \otimes W := T$ und das Bild $\varphi(v,w)$ mit $v \otimes w$. Elemente von $V \otimes W$ sind also Ausdrücke $\sum_{\text{endl.}} v_i \otimes w_i$ und es gilt:

$$\lambda(v \otimes w) = \lambda v \otimes w = v \otimes \lambda w$$
$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$$
$$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$$

Im Allgemeinen ist es nicht einfach zu entscheiden, ob zwei solche Ausdrücke $\sum_{\text{endl.}} v_i \otimes w_i$, $\sum_{\text{endl.}} v_j' \otimes w_j'$ das gleiche Element geben.
Will man den Ring hervorheben (z.B. wenn mehrere Ringe im Spiel sind), so schreibt man: $V \otimes_K W$ und spricht von dem Tensorprodukt von V mit W über K.
Im Folgenden werden wir die Konstruktion von $V \otimes W$ kaum noch verwenden, sondern lediglich die universelle Eigenschaft.

6.7. Satz + Definition: Seien $f: V_1 \to V_2$ und $g: W_1 \to W_2$ zwei K-lineare Abbildungen. Dann gibt es genau einen K-Modulhomomorphismus $V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$ $(f \otimes g)$ sodass $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$ für alle $(v,w) \in V_1 \times W_1$ gilt.

Beweis:
$$\begin{tikzcd} V_1 \times W_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f \times g"] \arrow[dr] & V_1 \otimes W_1 \arrow[d, "\Phi := f \otimes g"] \\ V_2 \times W_2 \arrow[r] & V_2 \otimes W_2 \end{tikzcd}$$
Die Komposition ist bilinear, faktorisiert also über $V_1 \otimes V_2$

Die Formel $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$ folgt aus der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} (v,w) \arrow[r] \arrow[d] & v \otimes w \arrow[d] \\ (f(v), g(w)) \arrow[r] & f(v) \otimes g(w) \end{tikzcd}$$

6.8 Zusatz: Sind f, g surjektiv, dann ist auch $f \otimes g$ surjektiv.

Beweis: Noch einmal zurück zur Konstruktion:

$$\begin{tikzcd} e(v,w) \quad K^{(V_1 \times W_1)} \arrow[r] \arrow[d] & V_1 \otimes V_2 \arrow[d] \\ e(f(v),g(w)) \quad K^{(V_2 \times W_2)} \arrow[r] & V_2 \otimes W_2 \end{tikzcd}$$

$\downarrow$ ist surjektiv, da $f \times g: V_1 \times W_1 \to V_2 \times W_2$ auch surjektiv ist

$\rightarrow$ ist surjektiv $\Rightarrow f \otimes g$ ist surjektiv

oder anders:

oder anders: $\sum_{\text{endl}} \overline{v_i} \otimes \overline{w_i}$ $\quad \overline{v_i} \in V_2 \quad \overline{w_i} \in V_2$

daran existieren $v_i \in V_1$ mit $f(v_i) = \overline{v_i}$, $w_i \in W_1$ mit $g(w_i) = \overline{w_i}$ also

$$(f \otimes g)\left(\sum_{\text{endl.}} v_i \otimes w_i\right) = \sum_{\text{endl.}} f(v_i) \otimes g(w_i) = \sum_{\text{endl.}} \overline{v_i} \otimes \overline{w_i} \quad \square$$