Beweis: Sei $\langle b_1, \dots, b_k \rangle = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ eine andere Basis.
$B = (b_1, \dots, b_k)$, $A = (a_1, \dots, a_k) \in K^{m \times k}$ die Spaltenvektormatrizen. Dann existiert ein $S \in GL(k, K)$ sodass $B = AS$.

$I = \{1, \dots, m\} \Rightarrow B_I = A_I \cdot S \Rightarrow \det B_I = \det A_I \cdot \det S$

Die Vektoren $(\det B_I)_{I \subseteq \{1, \dots, m\}}$ und $(\det A_I)_{I \subseteq \{1, \dots, m\}} \in K^{\binom{m}{k}}$ unterscheiden sich also nur durch den skalaren Faktor $\det S$. Also repräsentieren dem gleichen Punkt in $P(K^{\binom{m}{k}})$.
Dies zeigt, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Um die Injektivität zu zeigen, zunächst ein Hilfssatz:

10.5. Satz: Sei $u \in \Lambda^k V$ und $a \in V$, $a \neq 0$
$u$ hat die Gestalt $u = a \wedge w$ mit $w \in \Lambda^{k-1} V$
genau dann, wenn $a \in \ker(V \to \Lambda^{k+1} V)$

Beweis: $a \in \ker(V \to \Lambda^{k+1} V)$ ist klar, da $a \wedge a = 0$.
Dies zeigt eine Richtung. Für die andere Richtung ergänzen wir $a$ zu einer Basis $a_1 = a, a_2, \dots, a_m$ von $V = K^n$
Bzgl. dieser Basis hat $u$ die Gestalt

$$u = \sum_{|I| = k} \lambda_I a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k}$$

$$= \sum_{\substack{|I| = k \\ 1 \in I}} \lambda_I a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge \dots \wedge a_{i_k} + \sum_{\substack{|I| = k \\ 1 \notin I}} \lambda_I a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k}$$

$$a \wedge u = a_1 \wedge u = 0 + \sum_{\substack{|I| = k \\ 1 \notin I}} \underbrace{a_1 \wedge a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k}}_{\text{Teil einer Basis von } \Lambda^{k+1} V}$$

Also: $a \wedge u = 0 \Rightarrow \lambda_I = 0 \quad \forall |I| = k$ mit $1 \notin I$.

$$\Rightarrow u = \sum_{\substack{|I| = k \\ 1 \in I}} \lambda_I a_1 \wedge a_{i_2} \wedge \dots \wedge a_{i_k} + 0$$

$$= a_1 \wedge \sum_{\substack{|I| = k \\ 1 \in I}} \lambda_I a_{i_2} \wedge \dots \wedge a_{i_k} = a_1 \wedge w \in \Lambda^{k+1} V \quad \square$$

Es folgt $[u] \in P(\Lambda^k V)$ liegt im Bild von der Plückereinbettung genau dann, wenn $\dim \ker(V \xrightarrow{\wedge u} \Lambda^{k+1} V) = k$
und in dem Fall ist $U = \ker(V \to \Lambda^{k+1} V)$ der zugehörige Unterraum.
Dies zeigt die Injektivität von $G(k, m) \to P(\Lambda^k V)$

Bemerkung: Man nennt Vektoren $u \in \Lambda^k V$ der Gestalt $u = u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ vollständig zerlegbar. Die vollständig zerlegbaren Vektoren sind also die Plückerkoordinaten von Unterräumen.

Ist jeder Vektor vollständig zerlegbar?

**10.6 Satz:** Jeder Vektor $u \in \Lambda^{m-1} V$, ($V = K^m$) ist vollständig zerlegbar.

**Beweis:** Die Abbildung $V \to \Lambda^m V \cong K$ hat einen wenigstens $(m-1)$-dimensionalen Kern und Gleichheit gilt, wenn $u \neq 0$, da $u \in \Lambda^{m-1} V$ nicht $m$ lineare Faktoren haben kann. Bis auf Skalar

$$u = \lambda u_1 \wedge \dots \wedge u_{m-1} \quad \text{wobei } \langle u_1, \dots, u_{m-1} \rangle = \ker(V \to \Lambda^m V)$$

Nicht alle Vektoren im $\Lambda^k V$ für $2 \le k \le m-2$ sind vollständig zerlegbar, Beispiel:

$m = 4$, $k = 2$, $V = K^4$ wobei $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 = w$

$$\begin{aligned} V &\to \Lambda^3 V, & e_1 &\mapsto e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \\ & & e_2 &\mapsto e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \\ & & e_3 &\mapsto e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \\ & & e_4 &\mapsto e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \end{aligned}$$

$\wedge w$ bildet die Basis von $V = K^4$ auf die Standardbasis von $\Lambda^3 V$ ab, ist also ein Isomorphismus.

$$\Rightarrow \ker(V \to \Lambda^3 V) = 0$$

**10.7. Atlas für $G(k,m)$:**

Zu $I \subset \{1, \dots, m\}$, $|I| = k$ betrachten wir

$$U_I = \{[\sum_{|J|=k} \lambda_J e_J] \mid \lambda_I \neq 0\} \xrightarrow{\varphi_I} K^{\binom{m}{k}-1}$$

$$[\sum \lambda_J e_J] \mapsto \Big(\frac{\lambda_J}{\lambda_I}, \dots, \underbrace{\Big(\frac{\lambda_I}{\lambda_I}\Big)}_{\text{auslassen}}, \dots\Big)$$

$U_I \cap G(k,m)$ $\qquad A = (a_1, \dots, a_k) = (a_{ij}) \in K^{m \times k}$
die Matrix einer Basis $a_1, \dots, a_k$ von $U$.

Dann gilt:

$$U_I \cap G(k,m) = \{\langle a_1, \dots, a_k \rangle \mid \det A_I \neq 0\}$$

dann sind die Spalten der Matrix $B = A \cdot A_I^{-1}$ ebenfalls eine Basis. $B$ hat die Eigenschaft, dass $B_I = E_{k \times k}$

z.B. $I = \{1, \dots, k\} \subset \{1, \dots, m\}$ $\qquad B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline b_{k+1,1} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots \\ & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix}}_{k} \Big\} m-k$

Definieren: $U_{\{1,\dots,k\}} \cap G(k,m) \longrightarrow K \quad ; A \mapsto (b_{ij})$

Analog:

$$V_1 = U_1 \cap G(k,m) \xrightarrow{\varepsilon} K^{k(m-k)}$$

$\Rightarrow$ Die $\{V_1, \psi_1\}$ bilden einen Atlas für $G(k,m)$ aus $\binom{m}{k}$ Kartengebieten.

(10.8.) Als „Mannigfaltigkeiten" hat $G(k,m)$ über $\mathbb{R}$ die Dimension $\dim G(k,m) = k(m-k)$

$\dim P(\Lambda^k V) = \binom{m}{k} - 1$

Der erste nicht triviale Fall ist $m=4$ und $k=2$

Also: $G(2,4) \subset P^5$

$G(2, \mathbb{R}^4) = \{\text{Geraden} \mid L \subset P^3\} \supset \{\text{Geraden} \mid L \in \mathbb{R}^3\}$

$P^3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \cup \text{Horizont} = \mathbb{R}^3 \cup P^2(\mathbb{R})$

Also $G(2,\mathbb{R}^4)$ enthält die Menge der Geraden im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$, ist also von besonderem Interesse.

Wir wollen $G(2,4) \subset P^5$ durch eine Gleichung beschreiben.

Es bezeichne $(\lambda_{12} : \lambda_{13} : \lambda_{14} : \lambda_{23} : \lambda_{24} : \lambda_{34}) \in P^5$ die Koordinaten.

10.9. Satz (Plückerquadrik)

Es sei $q(x) = x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} \in K[x_{12}, \dots, x_{34}]$ die Plückerquadrik. Dann gilt:

$$G(2,4) = \{[\lambda_{ij}] \in P^5 \mid q(\lambda_{ij}) = 0\}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst $G(2,4) \subset \{[\lambda] \mid q(\lambda) = 0\}$

Sei $u = \langle a_1, a_2 \rangle \in G(2,4)$

$$\det(A|A) = \left|\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{41} & a_{42} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{41} & a_{42} \end{matrix}\right| = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} = (a_1, a_2)$$

Entwicklung nach den ersten beiden Spalten:

$$= \lambda_{12}\lambda_{34} - \lambda_{13}\lambda_{24} + \lambda_{14}\lambda_{23}$$
$$+ \lambda_{23}\lambda_{14} - \lambda_{24}\lambda_{13} + \lambda_{34}\lambda_{12}$$
$$= 2q(\lambda_{12}, \dots, \lambda_{34})$$

Zunächst: $2 \neq 0 \in K$: $\Rightarrow q(\lambda_{12}, \dots, \lambda_{34}) = 0$

$\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$

$q(\lambda_{12}, \dots, \lambda_{34}) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$ $\qquad f(a) = 0 \ \forall$ Werte $a_{ij} \in G^{4\times 2}$

$f(a) \in \mathbb{Q}[a_{12}, \dots, a_{24}][a_{34}]$

$\Rightarrow f = 0 \in \mathbb{Z}[a_{ij}] \subset \mathbb{Q}[a_{ij}]$

$\Rightarrow$ gilt auch für $K$ mit Charakteristik 2.

Umgekehrt: $(\lambda_{ij})$ mit $q(\lambda_{ij})=0$ also

$$\lambda_{12}\lambda_{34} - \lambda_{24}\lambda_{13} + \lambda_{14}\lambda_{23} = 0$$

und nehmen an, dass $[\lambda_{ij}] \in U_{12}$.

Also ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $\lambda_{12}=1$ annehmen. Der Unterraum zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\lambda_{23} & \lambda_{13} \\ -\lambda_{24} & \lambda_{14} \end{pmatrix}$$

hat die Plückerkoordinaten

$$(1\ \lambda_{13}\ \lambda_{14}, \lambda_{23}, \lambda_{24}, \underbrace{-\lambda_{23}\lambda_{14} + \lambda_{13}\lambda_{24}}_{=\lambda_{34}})$$

da $\lambda_{34} = \lambda_{24}\lambda_{13} - \lambda_{14}\lambda_{23}$

Für Punkte $(\lambda_{ij})$ in anderen Karten $U_{ij}$ geht das Argument auch analog. $\square$

$G(2,4) \supset \mathbb{P}^2 = \{(\lambda_{ij}) \in \mathbb{P}^5 \mid \lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{34} = 0\}$

$\cup\ \mathbb{P}^2_{A_0} = \{(\lambda_{ij}) \mid \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = 0\}$

Falls $(a_{11}, a_{12}) \neq 0 \Rightarrow (a_{21}, a_{22}), (a_{31}, a_{32}), (a_{41}, a_{42})$ sind linear abhängig von $(a_{11}, a_{12})$

$\Rightarrow$ rang $A = 1$ im Widerspruch zu $\dim\langle a_1, a_2\rangle = 2$

$\Rightarrow \mathbb{P}^2_{A_0} = \{L \in G(2,4) \mid L \subset \mathbb{P}\langle e_2, e_3, e_4\rangle\}$

$= \{L \subset \mathbb{P}^2_{A_0} = \text{Horizont}\}$

$\Rightarrow$ {Geraden im Raum} $= G(2,4) \setminus (\mathbb{P}\langle e_2, e_3, e_4\rangle)^\vee$

Allgemeiner für jeden 3-dimensionalen UVR $A$ von $K^4$ haben wir

$\{L \subset \mathbb{P}(A)\} = \mathbb{P}^2_A = \check{\mathbb{P}}(A) \subset G(2,4)$

$\mathbb{P}^2_B = \{(\lambda) \mid \lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{34} = 0\} = \{L \subset G(2,4) \mid \dots\}$

$\Rightarrow e_1 \in L$

Für jeden Punkt $B \in \mathbb{P}^3$ haben wir ein $\mathbb{P}^2_B = \{L \subset G(2,4) \mid \mathbb{P}(L)$ Gerade durch $B\}$

2 Familien von $\mathbb{P}^2$'s in $G(2,4)$

a) $\mathbb{P}^2_A = \{$Geraden in $\mathbb{P}^2(A)\}$ für jeden $\mathbb{P}^2(A) \subset \mathbb{P}^3$

b) $\mathbb{P}^2_B = \{$Geraden im $\mathbb{P}^3$ durch $B\}$ $\forall B \in \mathbb{P}^3$.

$$\mathbb{P}^2_A \cap \mathbb{P}^2_B = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } B \notin \mathbb{P}^2(A) \\ \mathbb{P}^1 = \{L \mid B \in L \subset \mathbb{P}^2(A)\} & \text{falls } B \in \mathbb{P}^2(A) \end{cases}$$

$\mathbb{P}^2_A \cap \mathbb{P}^2_{A'} = \{L = \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(A')\}$ $\quad A \neq A'$

$\mathbb{P}^2_B \cap \mathbb{P}^2_{B'} = \{BB'\}$ $\quad B \neq B'$

$L \in G(2,4) = \{\text{Gerade im } P^3\}$ eine feste Gerade.

$\langle a_1, a_2 \rangle$ Basis sodass $P\langle a_1, a_2 \rangle = L$

$H_L = \{ L' \in G(2,4) \mid L' \cap L \neq \emptyset \}$

$= \{ [b_1 \wedge b_2] \mid \det(a_1 a_2 b_1 b_2) = 0 \}$ $\qquad b_1 \wedge b_2 = (\mu_{12}, \dots, \mu_{34})$

$\Rightarrow H_L = \{ (\mu_{12}, \dots, \mu_{34}) \in G(2,4) \mid \lambda_{12}\mu_{34} - \lambda_{13}\mu_{24} + \lambda_{14}\mu_{23} + \lambda_{23}\mu_{14} - \lambda_{24}\mu_{13} + \lambda_{34}\mu_{12} = 0 \}$

$H_L = G(2,4) \cap H \subset P^5$ $\qquad H$ Hyperebene

Sind $L_1, \dots, L_4 \in G(2,4)$ vier allgemeine Geraden, dann sollte es nur endlich viele $L'$ geben, die alle vier schneiden. Wie viele?

Zwei, da $G(2,4)$ durch die Plückerquadrik definiert wird.

$P^3 \supset L_1 \cap L_2$ Punkte $\qquad L_3 \cap L_4$ ebenfalls

$|G(2,4)(F_q)| \Rightarrow |\{ A \in F_q^{4\times 2} \mid \text{rang}\, A = 2 \}| = (q^4-1)(q^4-q)$ $\qquad F_q^4 = q^4$

$|\{ A \in F_q^{2\times 2} \mid \det A = 0 \}| = |GL(2, F_q)| = (q^2-1)(q^2-q)$

$$|G(2,4)(F_q)| = \frac{(q^4-1)(q^4-q)}{(q^2-1)(q^2-q)} = (q^2+1)(q^2+q+1)$$

$$= q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1$$

Gaußalgorithmus für Zeilenstufenform von ${}^tA$

$\boxed{\begin{matrix}1 & \\ & 1\end{matrix}}\boxed{\begin{matrix}* & * \\ * & *\end{matrix}}$ $\qquad q^4$

$\begin{pmatrix}1 & * & 0 & * \\ & 0 & 1 & *\end{pmatrix}$ $\qquad q^3$

$\begin{pmatrix}1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0 & 1 & & * \\ & 0 & 1 & *\end{pmatrix}$ $\qquad 2q^2$

$\begin{pmatrix}0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad q$

$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad 1$