

oder anders: $\sum_{\text{end.}} \bar{v}_i \otimes \bar{w}_i$ $\bar{v}_i \in V_2$ $\bar{w}_i \in V_2$
 dann existieren $v_i \in V_1$ mit $f(v_i) = \bar{v}_i$, $w_i \in W_1$
 mit $g(w_i) = \bar{w}_i$ also

$$(f \otimes g) \left(\sum_{\text{end.}} v_i \otimes w_i \right) = \sum_{\text{end.}} f(v_i) \otimes g(w_i) = \sum_{\text{end.}} \bar{v}_i \otimes \bar{w}_i \quad \square$$

6.9. Satz: Das Tensorprodukt verhält sich mit direkten Summen:
 Sei V_i iel eine Familie von K -Modulen, W ein K -Modul,
 dann gilt:

$$\left[\bigoplus_{i \in I} V_i \right] \otimes W \cong \bigoplus_{i \in I} (V_i \otimes W)$$

sind kanonisch isomorph. Analog für W & $f \in J, V$.

Beweis: Wir betrachten die Inklusionen

$$u_i: V_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i \text{ und die Tensorprodukte}$$

$$p_i = u_i \otimes \text{id}_W: V_i \otimes W \rightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right) \otimes W$$

Nach der universellen Eigenschaft der direkten Summe

$\exists!$ Ψ , sodass das Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} & & \left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right) \otimes W \\ & \nearrow p_i & \uparrow \exists! \Psi \\ V_i \otimes W & \xrightarrow{u_i} & \bigoplus_{i \in I} (V_i \otimes W) \end{array}$$

Andererseits: $\left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right) \times W$

$$\begin{array}{ccc} & \searrow \downarrow p & \\ \left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right) \otimes W & \xrightarrow{\exists! \Phi} & \bigoplus_{i \in I} (V_i \otimes W) \end{array}$$

haben wir f
 mit $f \left(\sum_{\text{end.}} u_i(v_i), w \right)$
 $= \sum_{\text{end.}} f(u_i(v_i), w)$
 $= \sum_{\text{end.}} u_i(v_i) \otimes w$
 f ist bilinear.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Zusammen:} & \\ u_i \nearrow & & \searrow u_i \\ \left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right) \times W & \xrightarrow{\text{id}_W} & \left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right) \otimes W \\ \downarrow \text{id}_W & \nearrow \Psi & \downarrow \Psi \\ V_i \otimes W & \xrightarrow{u_i} & \bigoplus_{i \in I} (V_i \otimes W) \end{array}$$

Φ, Ψ sind zueinander inverse Isomorphismen, da alle Diagramme kommutieren.

6.10. Satz: Sei V ein beliebiger K -Modul. Dann gilt
 $V \otimes K \cong V$ sind kanonisch isomorph.

Beweis: Betrachten die Abbildung $K \times V \xrightarrow{\mu} V$, $\mu(k, v) = kv$
 μ ist bilinear, also $\exists$ kanonische Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K \times V & \longrightarrow & K \otimes V \\ \mu \downarrow & \searrow \Phi & \\ V & & \end{array}$$

Φ ist surjektiv: $m \in V$ beliebig, dann
 ist $m = \Phi(1 \otimes m) = \mu(1, m) = m$
 Φ ist injektiv, da
 $0 = \Phi \left(\sum_{\text{end.}} \lambda_i \otimes v_i \right) = \Phi \left(\sum_{\text{end.}} \lambda_i \otimes v_i \right)$
 $= \Phi \left(\sum_{\text{end.}} \lambda_i \otimes v_i \right) = \Phi \left(1 \otimes \sum_{\text{end.}} \lambda_i v_i \right) = \sum_{\text{end.}} \lambda_i v_i$

$$\Rightarrow \sum_{\text{end}} \lambda_i \otimes v_i = 1 \otimes \sum_{\text{end}} \lambda_i v_i = 1 \otimes 0 = 0(1 \otimes 0) = 0.$$

6.11. Corollar: a) Für freie Moduln gilt:

$$K^{(I)} \otimes K^{(J)} \cong K^{(I \times J)} \quad \text{kanonisch.}$$

b) Ist $x_1, \dots, x_m$ ein Erzeugendensystem von K -Modul V und $y_1, \dots, y_k$ ein Erzeugendensystem von K -Modul W .

$\Rightarrow x_i \otimes y_j \in V \otimes W$ für $i=1, \dots, m, j=1, \dots, k$ bilden ein Erzeugendensystem von $V \otimes W$.

Beweis: a) $K^{(I)} \otimes K^{(J)} = (\bigoplus_{i \in I} K) \otimes K^{(J)} \cong \bigoplus_{i \in I} (K \otimes K^{(J)})$

$$\stackrel{\cong}{=} \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{j \in J} K \cong \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} K \stackrel{\cong}{=} \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} K = K^{(I \times J)}$$

b) Ist $x_1, \dots, x_m$ ein Erzeugendensystem, dann ist die Abbildung $f: K^m \rightarrow V, e_i \mapsto x_i$ surjektiv.

Daher ist $g: K^k \rightarrow W$ surjektiv.

~~$$\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^k K \otimes K = K^m \otimes K^k \xrightarrow{f \otimes g} V \otimes W$$~~

$$\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^k K \otimes K = K^m \otimes K^k \xrightarrow{f \otimes g} V \otimes W$$

$e_i \otimes e_j \mapsto x_i \otimes y_j$ ist surjektiv.

Da die $e_i \otimes e_j$ $i=1, \dots, m, j=1, \dots, k$ eine Basis von $K^m \otimes K^k$ erzeugen, erzeugen diese und daher erzeugen auch ihre Bilder.

6.12. Satz: K Körper, V, W Vektorräume, dann gilt:

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$$

gerade $v_1, \dots, v_m$ Basis von V und $w_1, \dots, w_k$ Basis von W , dann ist $v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_1 \otimes w_k, v_2 \otimes w_1, \dots, v_m \otimes w_k$ eine Basis von $V \otimes W$.

Beweis: klar, mit 6.11.

Bemerkung: $K^m \otimes K^k \cong K^{m \cdot k}$ kann man auch direkt

Beweisen. $K^m \otimes K^k \ni t = \sum_{i=1}^m v_i \otimes w_i$

$$v_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} e_j \quad w_i = \sum_{l=1}^k b_{il} e_l$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} e_j \right) \otimes \left(\sum_{l=1}^k b_{il} e_l \right)$$

$$= \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} b_{il} \right) e_j \otimes e_l \Rightarrow e_j \otimes e_l \text{ erzeugen.}$$

$$\begin{array}{ccc} K^m \times K^k & \xrightarrow{\quad} & K^m \otimes K^k \\ (v, w) \searrow & \swarrow & \downarrow e_j \otimes e_l \\ e_j^*(v) \cdot e_l^*(w) & & 1 \end{array} \Rightarrow e_j \otimes e_l \text{ sind linear unabhängig}$$

6.13. Beispiel: $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$ wird erzeugt von $1 \otimes 1$ mit $1+2 \in \mathbb{Z}_2$
 $1+3 \in \mathbb{Z}_3$

$$\begin{aligned} 1 \otimes 1 &= 1 \cdot 1 \otimes 1 = (3-2) 1 \otimes 1 \\ &= -(2 \cdot 1) \otimes 1 + 1 \otimes (3 \cdot 1) = -0 \otimes 1 + 1 \otimes 0 \\ &= 0(-0 \otimes 1) + 0(1 \otimes 0) = 0 \\ \Rightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 &= 0 \end{aligned}$$

In den Übungen bestimmt $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = ?$

6.14. Beispiel: Sei $V_1 = K^m$, $V_2 = K^n$, $W_1 = K^r$, $W_2 = K^s$
 $f \in \text{Hom}(V_1, W_1)$, $g \in \text{Hom}(V_2, W_2)$ mit
 darstellenden Matrizen: $M_F^f(P) = A = (a_{ij}) \in K^{m \times r}$
 $M_F^g(Q) = B = (b_{kl}) \in K^{n \times s}$

Für $V_1 \otimes V_2$ verwenden wir die Basis

$$F: \begin{aligned} e_j \otimes e_l \quad j=1, \dots, m, \quad l=1, \dots, n \text{ in der Reihenfolge} \\ e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, \dots, e_1 \otimes e_n, \dots, e_m \otimes e_1, \dots, e_m \otimes e_n \end{aligned}$$

Analog $\bar{F} = \{\bar{e}_i \otimes \bar{e}_k \mid i=1, \dots, m; k=1, \dots, s\}$

Dann hat die darstellende Matrix von $f \otimes g$

$$\begin{aligned} & \text{in der Basis } \bar{F} \text{ von } (f \otimes g)(e_i \otimes e_l) = f(e_i) \otimes g(e_l) \\ &= \left(\sum_{j=1}^r a_{ij} \bar{e}_j \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^s b_{lk} \bar{e}_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s (a_{ij} b_{lk}) \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k \end{aligned}$$

$$M_F^f(f \otimes g) = (a_{ij} b_{kl}) = \begin{pmatrix} a_{11}b & \dots & a_{1m}b \\ a_{21}b & \dots & a_{2m}b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b & \dots & a_{mn}b \end{pmatrix}$$

$$M_F^f(f \otimes g) \in K^{m \times m \times n \times n}$$

$$(f \otimes g)(e_i \otimes e_l) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s a_{ij} b_{lk} \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k$$

$$(f \otimes g)\left(\sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \lambda_{jl} e_j \otimes e_l\right) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^m \lambda_{jl} a_{ij} b_{lk}\right) \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k$$

Dies ist wieder dasselbe als $(f \otimes g)(t)$.

6.15. Warnung! Das Tensorprodukt zweier injektiven
 linearer Abbildungen ist im Allgemeinen nicht
 notwendig injektiv.

Beispiel: $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 2x$ $g = \text{id}_{\mathbb{Z}/2}: \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/2$

$$f \circ g: \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2$$

$$\cong \mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}/2$$

$$(f \circ g)(1 \otimes 1) = f(1) \otimes g(1) = 2 \otimes 1 = 1 \otimes 2 \cdot 1$$

$$= 1 \otimes 0 = 0.$$

$\Rightarrow (f \circ g)$ ist die Nullabbildung.