

$L \in G(2,4) = \{\text{Gerade im } P^3\}$  also feste Gerade.

$\langle a_1, a_2 \rangle$  Basis sodass  $P \in \langle a_1, a_2 \rangle = L$

$$H_L = \{L' \in G(2,4) \mid L' \cap L \neq \emptyset\}$$

$$= \{L' = \langle b_1, b_2 \rangle \mid \det(a_1, a_2, b_1, b_2) = 0\} \quad b_1, b_2 = (\mu_{12}, \dots, \mu_{34})$$

$$\Rightarrow H_L = \{L' = \langle \mu_{12}, \dots, \mu_{34} \rangle \in G(2,4) \mid \lambda_{12}\mu_{34} - \lambda_{13}\mu_{24} + \lambda_{14}\mu_{23} + \lambda_{23}\mu_{14} - \lambda_{24}\mu_{13} + \lambda_{34}\mu_{12} = 0\}$$

$$H_L = G(2,4) \cap H \subset P^5 \quad H \text{ Hyperebene}$$

Sind  $L_1, \dots, L_4 \in G(2,4)$  vier allgemeine Geraden, dann sollte es nur endlich viele  $L'$  geben, die alle vier schneiden. Wie viele?

Zwei, da  $G(2,4)$  durch die Plückerquadrate definiert wird.  
 $P^3 \supset L_1 \cap L_2$  Punkt  $L_3 \cap L_4$  ebenfalls

$$|G(2,4)(F_q)| \Rightarrow |\{A \in F_q^{4 \times 2} \mid \text{rang } A = 2\}| \quad F_q^4 = q^4$$

$$= (q^4 - 1)(q^4 - q)$$

$$|\{A \in F_q^{2 \times 2} \mid \det A = 0\}| = |GL(2, F_q)| = (q^2 - 1)(q^2 - q)$$

$$|G(2,4)(F_q)| = \frac{(q^4 - 1)(q^4 - q)}{(q^2 - 1)(q^2 - q)} = (q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$$

$$= q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1$$

Gaußalgorithmus für Zeilenstufenform von  $A$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \end{array}} & q^4 \\ \swarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & * & 0 & * \\ & 0 & 1 & * \end{array} \right) & q^3 \\ \swarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & * & * & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & * & \\ & 0 & 1 & * \end{array} \right) & 2q^2 \\ \swarrow \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & * & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & q \\ \swarrow \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & 1 \end{array}$$

# 11) Segreprodukte und Rang von Tensoren

$$P(V) \times P(W) \hookrightarrow P(V \otimes W)$$

11.1. Definition: Ein Tensor  $t \in V \otimes W$ , wobei  $V, W$  endlichdimensionale  $K$ -VR mit  $\dim V = m$ ,  $\dim W = n$ , heißt zerlegbar, wenn er im Bild von  $V \times W \rightarrow V \otimes W$  liegt.

$$\text{Da } \lambda(V \otimes W) = (\lambda V) \otimes W = V \otimes (\lambda W) \quad \forall \lambda \in K^*$$

ist ein Tensor  $t \in V \otimes W$  zerlegbar genau dann, wenn  $t$  zerlegbar ist und die Zerlegung von  $[t] \in P(V \otimes W)$  ist nur eindeutig bis auf Konstanten  $\neq 0$ .

Somit ist es wohldefiniert und besser die Abbildung  $s: P(V) \times P(W) \rightarrow P(V \otimes W)$  zu betrachten.

Die Abbildung  $s$  heißt Segreabbildung des Produktes  $P(V) \times P(W)$ . Das Bild heißt Segreprodukt von  $P(V)$  und  $P(W)$ .

$\dim V \otimes W = m \cdot n$ , also hat Bild  $(s) \subset P(V \otimes W)$  Kodimension  $\dim P(V \otimes W) = \dim P(V) + \dim P(W) = m \cdot n - 1 \Rightarrow (m-1) + (n-1) = (m-1)(n-1)$

Betrachte Basen  $\{e_1, \dots, e_m\}$  von  $V$ ,  $\{f_1, \dots, f_n\}$  von  $W$  mit  $t \in V \otimes W$  eine eindeutige Darstellung

$$t = \sum_{i,j} z_{ij} e_i \otimes f_j \quad z_{ij} \in K$$

Wann ist  $t$  zerlegbar? Die  $m \cdot n$  Terme  $e_i \otimes f_j$  sind offensichtlich zerlegbar. Bei wievielen nicht?

$$\text{Frage: } t = \left( \sum_{i=1}^m x_i e_i \right) \otimes \left( \sum_{j=1}^n y_j f_j \right) \quad ?$$

Im Folgenden fassen wir die Koeffizienten  $z_{ij}$  von  $t$  als eine Matrix  $Z = (z_{ij}) \in K^{m \times n}$  auf.

11.2. Satz:  $t = \sum_{i,j} z_{ij} e_i \otimes f_j$  ist zerlegbar genau dann, wenn  $\text{Rang}(Z) \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } t \text{ zerlegbar} &\Rightarrow t = \sum_{i,j} z_{ij} e_i \otimes f_j \\ &= \left( \sum_i x_i e_i \right) \otimes \left( \sum_j y_j f_j \right) \\ \text{also } (z_{ij}) &= x_i y_j \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } Z = (z_{ij}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix} \in K^{m \times n}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ folgendes Diagramm}$$

$$\begin{array}{ccc} K^m & \xrightarrow{Z} & K^n \\ \downarrow & & \uparrow \\ \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \end{array}$$

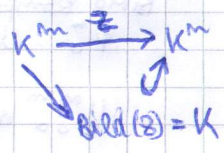
$$\text{also } \text{Rang}(Z) = \dim(\text{Bild } Z) \leq \dim \text{Bild} \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{bmatrix} \leq 1$$

d.h. die Spalten von  $Z$  sind Vektoren von  $(\text{ebenso die Zeilen von } Y\text{-Vektor})$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Bemerkung:  $Z$  nennt man auch Dyade.

" $\Leftarrow$ ": Sei  $\text{Rang } Z \leq 1$ , dann faktoriert  $Z$  und die Wahl eines Isomorphismus  $\text{Bild}(Z) \cong K$  liefert eine Zerlegung von  $Z$ .



M.3. Bemerkung: Anwendungen: In der algebraischen Statistik entsprechen zerlegbare Vektoren (d.h. Zerfaktoren im Segreprodukt) unabhängigen Zufallsvariablen. In der Quantenmechanik entsprechen nicht zerlegbare Vektoren verschränkten Wellenfunktionen.

$$\begin{aligned} \gamma: P(K^m) \times P(K^m) &\hookrightarrow P(K^m \otimes K^m) \cong P(K^{m \times m}) \\ ([x_i], [y_j]) &\longmapsto [z_{ij}] = [x_i, y_j] \end{aligned}$$

M.4. Bemerkung: Standardkarten vom Segreprodukt  $X = \text{Bild}(\gamma)$   
Sei  $U_{0,0}^{m,m} = \{ [z_{ij}] \in P(K^{m \times m}) \mid z_{00} \neq 0 \}$

$$\begin{aligned} U_{0,0}^{m,m} &\longrightarrow K^{m \cdot m - 1} \\ [z_{ij}] &\longmapsto (z_{ij}/z_{00}) \mid (z_{ij} \neq 0, 0) \end{aligned}$$

$$[z_{ij}] = \begin{pmatrix} z_{00} & \dots & z_{0m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m-1,0} & \dots & z_{m-1,m-1} \end{pmatrix}$$

Umkehrabbildung:  $K^{m \cdot m - 1} \longrightarrow U_{0,0}^{m,m}$   
 $(z_{ij}) \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & z_{01} & \dots & z_{0,m-1} \\ z_{1,0} & \dots & \dots & z_{1,m-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ z_{m-1,0} & \dots & \dots & z_{m-1,m-1} \end{bmatrix}$

Betrachte die Abbildung:

$$\begin{aligned} \psi_{0,0}^{m,m} : U_{0,0}^{m,m} \cap X &\longrightarrow K^{m \cdot m - 2} = K^{m(m-2)} \\ [z_{ij}] &\longmapsto \left( \frac{z_{10}}{z_{00}}, \dots, \frac{z_{m-1,0}}{z_{00}}, \frac{z_{01}}{z_{00}}, \dots, \frac{z_{0,m-1}}{z_{00}} \right) \end{aligned}$$

für  $[z_{ij}] \in X$  durch  $\exists x_i, y_j : z_{ij} = x_i y_j$  also gilt  
 $z_{ij} z_{00} = x_i y_j x_0 y_0 = (x_i y_0) (y_j y_0) = z_{i0} z_{0j}$

$$\text{d.h. } \frac{z_{ij}}{z_{00}} = \frac{z_{i0}}{z_{00}} \frac{z_{0j}}{z_{00}}$$

Also ist die Umkehrabbildung

von  $\psi_{0,0}^{m,m}$ :

$$\begin{aligned} K^{m(m-2)} &\longrightarrow U_{0,0}^{m,m} \cap X \\ (z_{10}, \dots, z_{m-1,0}, z_{01}, \dots, z_{0,m-1}) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & z_{01} & \dots & z_{0,m-1} \\ z_{10} & & & \\ \vdots & & & \\ z_{m-1,0} & & & z_{00} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

genauso für  $U_{00}^{nm} \cap X$ .

Bemerkung: Vektoren des Tensorprodukts  $P(K^m) \times P(K^m) \in P(K^{m \times m})$  sind kompatibel mit dem Vektorraum  $P(K^m)$  und  $P(K^m)$ .

$$\psi_0^m: U_0^m = \{[x_i] \in P(K^m) \mid x_0 \neq 0\} \rightarrow K^{m-1}$$

$$[x_i] \mapsto (x_i/x_0)_{i \neq 0}$$

$$U_{00}^{nm} \cap X = \{[z_{ij}] \in P(K^{m \times m}) \mid z_{00} \neq 0, z_{ij} = x_i/x_j\}$$

$$\begin{array}{ccc} U_0^m \times U_0^m & \longrightarrow & U_{00}^{nm} \cap X \\ \downarrow \psi_0^m \times \psi_0^m & & \downarrow \\ K^{m-1} \times K^{m-1} & \xlongequal{\quad} & K^{m-1} \end{array} \quad \text{kommutativ!}$$

Also Karte des Tensorprodukts ist Produkt der Karten der projektiven Räume.

11.5. Definition: Tensor  $t \in V \otimes W$  hat Tensorrang  $r$  wenn  $t$  die Summe von  $r$  zerlegbaren Tensoren ist und  $r$  minimal mit dieser Eigenschaft ist.

11.6. Satz:  $t = \sum z_{ij} e_i \otimes f_j \in V \otimes W$  hat Tensorrang  $r$  genau dann, wenn die Matrix  $Z = (z_{ij})$  Rang  $r$  hat.

Beweis:  $Z \leq r \Leftrightarrow Z$  faktorisierbar

$$Z = (z_{ij}) = \sum_{k=1}^r \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k1} & \dots & x_{kr} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} K^m & \xrightarrow{Z} & K^m \\ \downarrow & & \uparrow \\ K^r & & K^r \end{array} \quad \begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{1r} \\ \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{mr} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ist eine Zerlegung in eine Summe von  $r$  Matrizen vom Rang  $\leq 1$ , entspricht Zerlegung von  $t$  in  $r$  zerlegbare Tensoren.

$\Leftrightarrow t$  hat Tensorrang  $r$ .  $\square$

11.7. Bemerkung: Implizit haben wir verwendet:

$$V \otimes W \cong \text{Hom}(W^*, V)$$

Analog definiert man Zerlegbarkeit für das Tensorprodukt von mehr Faktoren: Bild  $(V \times V \times W \rightarrow U \otimes V \otimes W)$  = zerlegbare Tensoren in  $U \otimes V \otimes W$

11.8. Beispiel: Die Frage nach dem Rang eines Tensors hat Anwendung in der Informatik: Die Matrixmultiplikation  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$  benötigt nach Standardmethode 23 Multiplikationen.