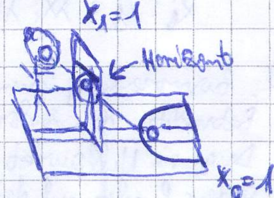
Man nennt (U_i, φ_i) eine Karte von $P^n(K)$ und die Kollektion
$\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ den Standardatlas von $P^n(K)$.

$\bigcup_{i=0}^{n} U_i = P^n(K)$ da $\forall\, (x_0 : \ldots : x_n)$ wenigstens ein $x_i \neq 0$.
Den Punkt $(0 : \ldots : 0 : 1 : 0 : \ldots : 0) \in U_i$ wird keine andere Karte.
$\varphi_i^{-1} : K^n \to U_i \subset P^n(K),\ (y_1, \ldots, y_n) \longmapsto (y_1 : y_2 : \ldots : y_i : 1 : y_{i+1} : \ldots : y_n)$

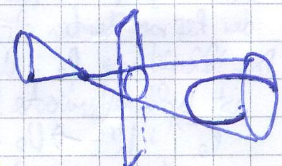
Perspektivisches Zeichnen ist mathematisch betrachtet der Kartenwechsel in $P^2(\mathbb{R})$.



Parallelen in der Ebene $x_0 = 1$
schneiden sich in einem Punkt
des Horizonts
$H = \{(0 : 1 : t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset U_1$
außer die parallelen zu Gerade $x_0 = 1, x_1 = 1$
Solche Geraden schneiden sich im Fluchtpunkt $(1 : a : t)$
$L_a = \{(1 : a : t)\} \cong \{(a, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$
$(1 : a : t) = (1/t : a/t : 1)$ für $t \neq 0$

$(1 : a : t) \in U_2 \setminus \{U_0 \cup U_1\}$

$\lim_{t \to \infty} (1/t, a/t, 1) = (0, 0, 1)$
Eine Parabel in der Ebene $x_0 = 1$ gibt eine Ellipse in $x_1 = 1$,
die den Horizont berührt



4.7. Definition:
(Lineare Unterräume)
$P(V) \cong P(K^{n+1}) = P^n(K)$
Ein linearer Unterraum $P \subset P^n(K)$
der Dimension d ist die Menge der Punkte
$P(W) \subset P^n(K)$ wobei $W \subset K^{n+1}$ ein $(d+1)$-dimensionaler
UVR ist. Also $P(W) \cong P^d(K)$
Eine Gerade L in $P^n(K)$ ist ein eindimensionaler
Unterraum. Also $L = P(W)$ mit $W \subset K^{n+1}$ ein
2-dimensionaler UVR. Eine Hyperebene $H \subset P^n(K)$
ist ein linearer Unterraum der Codimension 1
($\Leftrightarrow$ n-dim. UVR von K^{n+1})
Für $a = (a_0, \ldots, a_n) \in K^{n+1}$, $a \neq 0$ ist
$H_a = \{(x_0 : \ldots : x_n) \mid a_0 x_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\}$
eine Hyperebene $P(\mathrm{Ker}\ K^{n+1} \xrightarrow{(a_0 \ldots a_n)} K)$

Für Punkte $p_0,\dots,p_d \in P^m(K)$ mit Repräsentanten $v_0,\dots,v_d \in K^{m+1}$ ($[x_i] = p_i$) ist der lineare Spann der linearen Unterraums

$$\overline{p_0 \dots p_d} = P(\langle v_0,\dots,v_d \rangle)$$

$\overline{p_0 \dots p_d} \cong P^d(K) \Leftrightarrow v_0,\dots,v_d$ linear unabhängig sind.

Eine andere Beschreibung vom linearen Spann ist:

$$\overline{p_0 \dots p_d} = \bigcap_{H_a} H_a \qquad \text{mit } H_a \ni p_0,\dots,p_d$$

(Jeder UVR $\subset K^{m+1}$ ist Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems.)

$W \subset K^{m+1}$ lässt sich durch Erzeuger oder Gleichungen schreiben.

Automorphismen des $P^m(K)$:

Sei $A \in GL(m+1,K)$. Dann induziert der Vektorraumisomorphismus $K^{m+1} \xrightarrow{A} K^{m+1}$, $v \mapsto Av$ eine Bijektion

$$f_A : P^m(K) \to P^m(K)$$

$$f_A([v]) = [Av]$$

f_A ist wohldefiniert, da $Aw = A(\lambda v) = \lambda Av$ also $Av \sim A\lambda v$ kann.

$\Rightarrow [Av] = [A\lambda v] = [Aw]$

Die Gruppe dieser Automorphismen von $P^m(K)$ wird mit $PGL(m+1,K)$ bezeichnet.

4.8. Satz: $PGL(m+1,K) = GL(m+1,K)/K^* \subset K^{(m+1)\times(m+1)}/K^* = P(K^{(m+1)\times(m+1)})$

Beweis: Für $A = \lambda E_{m+1}$ mit $\lambda \in K^*$ gilt

$f_{\lambda E_{m+1}} = id_{P^m(K)}$ denn $f_{\lambda E_{m+1}}([v]) = [\lambda E_{m+1} v] = [\lambda v] = [v]$ $\forall [v] \in P^m(K)$

Also $\{\lambda E_{m+1} \mid \lambda \in K^*\} \subset Ker(GL(m+1,K) \to PGL(m+1,K))$

Es ist der ganze Kern, da $f_A = id_{P^m(K)}$ impliziert, dass $Ae_i \sim e_i$ für $e_i \in K^{m+1}$, $i = 0,\dots,m$ die Einheitsvektoren.

Also $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$ wobei $Ae_i = \lambda_i e_i$ $\quad \lambda_i \in K^*$

Betrachte den Skalierungspunkt $(1 : \dots : 1)$

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_0\\ \vdots \\ \lambda_m\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_m = \lambda$$

$\Rightarrow A = \lambda E_{m+1}$. Also $PGL(m+1,K) \cong GL(m+1,K)/\{\lambda E_{m+1} \mid \lambda \in K^*\}$

$= GL(m+1,K)/K^* \subset K^{(m+1)\times(m+1)}/K^* \subset P(K^{(m+1)\times(m+1)})$

4.9. Satz: Es seien $p_0, \dots, p_{m+1} \in \mathbb{P}^m(K)$ $(m+2)$ Punkte, von denen je $m+1$ den ganzen $\mathbb{P}^m(K)$ aufspannen (oder keine $m+1$ in einer Hyperebene liegen.)
Dann gibt es genau einen Automorphismus $f_A \in PGL(m+1, K)$ mit
$f_A(1:0:\dots:0) = p_0$, $f_A(0:1:0:\dots:0) = p_1$
$f_A(0:0:\dots:1) = p_m$ und $f_A(1:1:\dots:1) = p_{m+1}$

Beweis: Betrachte Repräsentanten $v_0, \dots, v_{m+1} \in K^{m+1}$ der Punkte:
Dann ist $v_0, \dots, v_m$ eine Basis von K^{m+1}, da die ersten $(m+1)$ Punkte nicht in einer Hyperebene liegen, also:
$$v_{m+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_m v_m \quad \text{mit } \lambda_i \in K$$
ist eine Linearkombination. Alle $\lambda_i \neq 0$, da auch $p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_m, p_{m+1}$ in keiner Hyperebene liegen.
$A = (\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_m v_m) \in GL(m+1, K)$
Dann gilt:
$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \lambda_0 v_0 + \lambda_m v_m = v_{m+1}$$
und $Ae_i = \lambda_i v_i \sim v_i$

Also: f_A hat die gewünschte Eigenschaft. Eindeutigkeit folgt aus 4.8.