Beispiel: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$, $g = id_{\mathbb{Z}/2}: \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2$

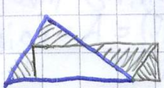
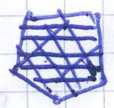
$$f\otimes g: \mathbb{Z}\otimes \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2$$
$$\cong \mathbb{Z}/2 \qquad \cong \mathbb{Z}/2$$
$$(f\otimes g)(1\otimes\bar 1) = f(1)\otimes g(\bar 1) = 2\otimes \bar 1 = 1\otimes 2\cdot\bar 1$$
$$= 1\otimes\bar 0 = 0.$$

$\Rightarrow (f\otimes g)$ ist die Nullabbildung.

6.16. Anwendung des Tensorprodukts auf das dritte Hilbertsche Problem:

Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon, d.h. die konvexe Menge von endlich vielen Punkten $x_1,\dots,x_m \in \mathbb{R}^2$:

$$P = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$$

 → Rechteck → Quadrat 

3-tes Hilbert'sches Problem: Gegeben ein Polyeder im $\mathbb{R}^3$. Können wir diesen mit Ebenen durchschneiden und die Teile neu zusammensetzen, sodass wir einen Quader (Würfel) erhalten?

Antwort: Satz (Max Dehn): Dies ist im Allgemeinen nicht möglich.

Beweis: (Hadwiger) Seien $P_1,\dots,P_N$ Polyeder im $\mathbb{R}^3$. Wir führen eine Invariante ein, die beim Zerschneiden, etwa $P_1 = P_1' \cup P_1''$, sich nicht ändert. Eine solche Invariante ist das Volumen $V(P_1,\dots,P_N) = \sum_{i=1}^N V(P_i) \in \mathbb{R}$

Wir betrachten den Dehntensor:

$D(P_1,\dots,P_N) \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\pi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, der wie folgt definiert ist:

P Polyeder, K Kante des Polyeders, φ_K Innenwinkel

l_K Länge der Kante $\quad \varphi_K, l_K \in \mathbb{R}$

$\bar\varphi_K \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\pi \quad \bar\varphi_K \otimes l_K \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\pi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$

P Polyeder $\quad D(P) = \sum_{K \text{ Kante}} \bar\varphi_K \otimes l_K$

$P_1,\dots,P_N$ Polyeder $\quad D(P_1,\dots,P_N) = \sum_{j=1}^N D(P_j)$

Behauptung: $P = P' \cup P''$ die Zerlegung eines Polyeders mit Zerschneiden entlang einer Ebenen E, dann gilt:
$$D(P) = D(P', P'') = D(P') + D(P'')$$

Beweis: Zerlegt E eine Kante K von P in $K' \cup K'' = K$ mit $K' \subset P'$, $K'' \subset P''$, dann gilt $l_K = l_{K'} + l_{K''}$ und $\varphi_{K'} = \varphi_K = \varphi_{K''}$, also
$$\overline{\varphi_{K'}} \otimes l_{K'} + \overline{\varphi_{K''}} \otimes l_{K''} = \overline{\varphi_K} \otimes l_{K'} + \overline{\varphi_K} \otimes l_{K''}$$
$$= \overline{\varphi_K} \otimes (l_{K'} + l_{K''}) = \overline{\varphi_K} \otimes l_K$$

Zerschneidet E eine Seite des Polyeders, dann erhalten wir zwei neue Kanten $K' \subset P'$, $K'' \subset P''$ mit
$l = l_{K'} = l_{K''}$ und $\varphi_{K'} + \varphi_{K''} = \pi$
$$\Rightarrow l_{K'} \otimes \overline{\varphi_{K'}} + \overline{\varphi_{K''}} \otimes l_{K''} = (\overline{\varphi_{K'}} + \overline{\varphi_{K''}}) \otimes l$$
$$= \overline{\varphi_{K'} + \varphi_{K''}} \otimes l = \overline{\pi} \otimes l = 0 = 0 \otimes l$$
Dies trifft auf alle Kanten zu.
$$\Rightarrow D(P) = D(P') + D(P'')$$

Es reicht also zu zeigen, dass D() $\neq$ D()

D(Quader): Kantenlängen a, b, c
$$D(Q) = 4(\pi/2 \otimes (a+b+c)) = 2(\pi \otimes (a+b+c)) = 0$$
D(Tetraeder): Kantenlänge s, φ_1 Winkel
$$D(T) = 6 \cdot \overline{\varphi_1} \otimes s$$

Behauptung: φ_1 Kanteninnenwinkel des regulären Tetraeders, dann gilt $\varphi_1/\pi \notin \mathbb{Q}$

Beweis: $\Rightarrow$ Übungen.

$\Rightarrow \mathbb{Q}\overline{\varphi_1} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}\pi$ erzeugt einen 1-dimensionalen Unterraum.
Sind $\varphi_0 = \pi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ die endlich vielen Winkel, die beim Zerschneiden auftreten und
$l_1 = s, l_2, \dots, l_M$ die endlich vielen Längen.
Dann gilt die Annahme, dass die Teile sich zu einem Quader zusammensetzen lassen, $6\varphi_1 \otimes s = 0 \in V_1 \otimes W_1$
wobei $V_1 = \langle \overline{\varphi_1}, \dots, \overline{\varphi_N} \rangle_{\mathbb{Q}}$, $W_1 = \langle l_1, \dots, l_M \rangle$
Andererseits können wir $\overline{\varphi_1}$ zu einer Basis $\overline{\varphi_1}, \dots, \overline{\varphi_n}$ von V_1 und $s = l_1$ zu einer Basis $l_1, \dots, l_m$ ergänzen.
Dann ist $\overline{\varphi_1} \otimes s$ einer der Basisvektoren des $\mathbb{Q}$-VR $V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} W_1$, also $\neq 0$ $\Rightarrow 6\varphi_1 \otimes \overline{s} \neq 0$

Satz: (Sydler) Zwei konvexe Polyeder $P, Q \in \mathbb{R}^3$ sind zerlegungsäquivalent genau dann wenn $V(P) = V(Q)$ und $D(P) = D(Q)$

Bemerkung: Die Notwendigkeit haben wir eingesehen.

7) Multilinearformen und die Tensoralgebra

7.1. Definition: K kommutativer Ring mit 1.
$V_1, \dots, V_m$ und W seien K-Moduln.
Eine Abbildung $f: V_1 \times \dots \times V_m \to W$ heißt multilinear falls f linear in jeder Komponente ist, d.h.

$$f(v_1, \dots, v_{k-1}, \lambda v_k' + \mu v_k'', v_{k+1}, \dots, v_m) = \lambda f(v_1, \dots, v_k', \dots, v_m) + \mu f(v_1, \dots, v_{k-1}, v_k'', \dots, v_m)$$

$\forall v_i \in V_i$, $v_k', v_k'' \in V_k$ und $\forall \lambda, \mu \in K$ gilt
für $k = 1, \dots, m$

7.2. Definition: Sei K kommutativ mit 1. Das Tensorprodukt von K-Moduln $V_1, \dots, V_m$ ist ein K-Modul T zusammen mit einer multilinearen Abbildung $\tau: V_1 \times \dots \times V_m \to T$, welches folgende universelle Eigenschaft erfüllt:
Für alle multilinearen Abbildungen $f: V_1 \times \dots \times V_m \to X$ existiert genau eine lineare Abbildung $\Phi: T \to X$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_m \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "\exists! \Phi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

kommutiert.

7.3. Bemerkung: Das Tensorprodukt ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt.
Beweis: Wörtlich wie in 6.4. gezeigt.

7.4. Satz + Notation: Das Tensorprodukt T von $V_1, \dots, V_m$ existiert und wird mit $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_m = T$ bezeichnet.
Das Bild von $(v_1, \dots, v_m) \in V_1 \times \dots \times V_m$ wird mit
$\tau(v_1, \dots, v_m) = v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_m$ notiert.

Beweis: Genauso wie Satz 2.5. Wir betrachten den freien Modul
$K^{(V_1 \times \dots \times V_m)} = \bigoplus_{(v_1, \dots, v_m) \in V_1 \times \dots \times V_m} K$ mit Basiselementen $e_{(v_1, \dots, v_m)}$
und die natürliche k-lineare Abbildung
$f: V_1 \times \dots \times V_m \to K^{(V_1 \times \dots \times V_m)}$, $(v_1, \dots, v_m) \mapsto e_{(v_1, \dots, v_m)}$

f ist nicht multilinear, aber mit $U \subset K^{(V_1\times\dots\times V_m)}$ der Untermodul erzeugt von allen Ausdrücken.

$$e_{(v_1,\dots,\lambda v_k' + \mu v_k'',\dots,v_m)} - \lambda e_{(v_1,\dots,v_k',\dots,v_m)} - \mu e_{(v_1,\dots,v_k'',\dots,v_m)}$$

ist die Komposition $\tau = p \circ f$ mit $p : K^{(V_1\times\dots\times V_m)} \to T := K^{(V_1,\dots,V_m)}/U$ multilinear. T hat die gewünschte universelle Eigenschaft.
Zu $f: V_1\times\dots\times V_m \to X$ multilinear ist $\Phi : T \to X$ die Abbildung mit
$\Phi(e_{(v_1,\dots,v_m)} + U) = f(v_1,\dots,v_m)$ □

Elemente von $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_m$ sind also endliche Summen von Ausdrücken der Art $v_1 \otimes \dots \otimes v_m$ mit $v_i \in V_i$.

7.5. Satz: (Assoziativität des Tensorproduktes)
V_1, V_2, V_3 K-Moduln, dann gibt der kanonische Isomorphismus:
$$(V_1\otimes V_2)\otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

Beweis: Die Abbildung $V_1 \times V_2 \times V_3 \to (V_1\otimes V_2)\otimes V_3$
$(x,y,z) \to (x\otimes y)\otimes z$
ist multilinear. Dies gibt einen kanonischen Homomorphismus

$$\begin{tikzcd} V_1\otimes V_2\otimes V_3 \arrow[dr, "\Phi"'] & V_1\times V_2\times V_3 \arrow[l, "\tau"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ & (V_1\otimes V_2)\otimes V_3 \end{tikzcd}$$

Umgekehrt:

$$\begin{tikzcd} & V_1\otimes V_2\otimes V_3 \\ (V_1\otimes V_2)\times V_3 \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r] & (V_1\otimes V_2)\otimes V_3 \arrow[u, "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

$(t,z) \mapsto t\otimes z$

Φ und Ψ sind zueinander inverse Isomorphismen.

7.6. Satz: Beim Bilden von Tensorprodukten kommt es nicht auf Klammerung an □

7.7. Notation: V K-Modul, $m \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnet
$$V^{\otimes m} := V \otimes \dots \otimes V \quad (m \text{ Mal})$$
$$V^{\otimes 0} := K$$
Dann gilt nach 7.6:
$$V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} \cong V^{\otimes (m+n)}$$
$T(V) := \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} V^{\otimes m}$ heißt Tensoralgebra von V.
Vermöge $\mu_{m,n} : V^{\otimes m} \times V^{\otimes n} \to V^{\otimes(m+n)}$
und linearer Fortsetzung wird $T(V)$ zu einer K-Algebra.
$T(V)$ nicht kommutativ, da i.A. $x\otimes y \neq y \otimes x$

$1 \in K = T^0(V)$ ist das Einselement.