

4.9. Satz: Es seien $P_0, \dots, P_{mt+1} \in P^m(K)$ ($mt+2$ Punkte, von denen je mt mit den anderen $P^m(K)$ aufspannen (oder keine mt in einer Hyperebene liegen). Dann gibt es genau einen homogenen Polynom $P_\lambda \in PGL(m+1, K)$ mit $P_\lambda(1:0:\dots:0) = P_0, P_\lambda(0:1:0:\dots:0) = P_1, \dots, P_\lambda(0:0:\dots:1) = P_m$ und $P_\lambda(1:1:\dots:1) = P_{mt+1}$

Beweis: Bekannte Repräsentanten $V_0, \dots, V_m \in K^{mt+1}$ der Punkte:

Dann ist $V_0, \dots, V_m$ eine Basis von K^{mt+1} , da die ersten $mt+1$ Punkte nicht in einer Hyperebene liegen, also:

$$V_{mt+1} = \lambda_0 V_0 + \dots + \lambda_m V_m \text{ mit } \lambda_i \in K$$

ist eine Linearkombination. Alle $\lambda_i \neq 0$, da auch

$P_0, \dots, P_m, P_{mt+1}$ in keiner Hyperebene liegen. $A = (\lambda_0 V_0, \dots, \lambda_m V_m) \in GL(mt+1, K)$

Dann gilt:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_0 V_0 + \dots + \lambda_m V_m = V_{mt+1}$$

$$\text{und } A e_i = \lambda_i V_i \sim V_i$$

Also: P_λ hat die gewünschte Eigenschaft. Eindeutigkeit folgt aus 4.8.

4.10. Allgemeine affine Karten:

Die Komposition $P^m(K) \xrightarrow{A} P^m(K) \supset U \xrightarrow{p_0} K^m$ ist auf $U = P^{-1}(U_0)$ definiert.

Hat die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m0} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \in GL(mt+1, K)$

die erste Spalte $\begin{pmatrix} a_{00} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{pmatrix}$, dann ist $U = P^m/H_A$

wobei $H_A = \{x \in P^m(K) \mid a_{00}x_0 + \dots + a_{m0}x_m = 0\}$

dann $H_A \xrightarrow{p_0} H_0 = \{x \mid x = 0\}$

Andern wir die anderen Zeilen der Matrix A ab, etwa $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & \tilde{a}_{01} & \dots & \tilde{a}_{0m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m0} & \tilde{a}_{m1} & \dots & \tilde{a}_{mm} \end{pmatrix}$ so verändert sich die Kartenabbildung

$$U \xrightarrow{p_0 \circ A} K^m \ni z$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$p_0 \circ \tilde{A} \rightarrow K^m \ni z \circ b$$

durch eine affine Transformation, wobei

$$\tilde{A} = A \begin{pmatrix} 1 & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{matrix}} \\ 0 & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\text{wobei } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Für Punkte $p_0, \dots, p_d \in P^n(K)$ mit Repräsentanten $v_0, \dots, v_d \in K^{n+1}$
 $[x_i] = p_i$ ist der lineare Spann des linearen Unterraums
 $P_0 \dots P_d = P(\langle v_0, \dots, v_d \rangle)$
 $P_0 \dots P_d \approx P^n(K) \Leftrightarrow v_0, \dots, v_d$ linear unabhängig sind.

Eine andere Beschreibung vom linearen Spann ist:

$P_0 \dots P_d = \bigcap_{H \ni p_i} H$ mit $H \ni p_0, \dots, p_d$
 (Jeder UVR $\subset K^{n+1}$ ist Lösungsmenge eines homogenen
 Gleichungssystems.)

$W \subset K^{n+1}$ lässt sich durch Erzeuger der Gleichungen schreiben.

Automorphismen der $P^n(K)$:

Sei $\lambda \in GL(n+1, K)$. Dann induziert der Vektorraumisomorphismus
 $K^{n+1} \xrightarrow{\lambda} K^{n+1} \quad v \mapsto \lambda v$ eine Bijektion

$$p_\lambda: P^n(K) \rightarrow P^n(K)$$

$$p_\lambda([v]) = [\lambda v]$$

p_λ ist wohldefiniert, da

$$\lambda w = \lambda(\lambda v) = \lambda \lambda v \text{ also } \lambda v \sim \lambda \lambda v \text{ bzw.}$$

$$\Rightarrow [\lambda v] = [\lambda \lambda v] = [\lambda w]$$

Die Gruppe dieser Automorphismen von $P^n(K)$ wird mit
 $PGL(n+1, K)$ bezeichnet.

$$4.8. \text{ Satz: } PGL(n+1, K) = GL(n+1, K) / K^* \subset K^{(n+1) \times (n+1)} / K^* \\ = P(K^{(n+1) \times (n+1)})$$

Beweis: Für $\lambda = \lambda E_{n+1}$ mit $\lambda \in K^*$ gilt

$$p_{\lambda E_{n+1}} = \text{id}_{P^n(K)} \text{ denn } p_{\lambda E_{n+1}}([v]) = [\lambda E_{n+1} v] \\ = [\lambda v] = [v] \quad \forall [v] \in P^n(K)$$

Also $\{ \lambda E_{n+1} \mid \lambda \in K^* \} \subset \ker(GL(n+1, K) \rightarrow PGL(n+1, K))$

Es ist der ganze Kern, da $p_\lambda = \text{id}_{P^n(K)}$ impliziert, dass

$\lambda e_i \sim e_i$ für $e_i \in K^{n+1}$ $i=0, \dots, n$
 die Einheitsvektoren.

$$\text{Also } \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ wobei } \lambda e_i = \lambda e_i \quad \lambda_i \in K^*$$

Betrachte den Skalierungspunkt $(1: \dots: 1)$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda E_{n+1} \quad \text{Also } PGL(n+1, K) \cong GL(n+1, K) / \{ \lambda E_{n+1} \mid \lambda \in K^* \} \\ = GL(n+1, K) / K^* \subset K^{(n+1) \times (n+1)} / K^* \subset P(K^{(n+1) \times (n+1)})$$

Beweis: $(1, w_1, \dots, w_m) = \frac{1}{a_0 x_0 + \dots + a_m x_m} (x_0, \dots, x_m) \tilde{A}$

$$= \frac{1}{a_0 x_0 + \dots + a_m x_m} (x_0, \dots, x_m) AB \begin{pmatrix} 1 & b_{01} & \dots & b_{0m} \\ 0 & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

$$= (1, z_1, \dots, z_m) \begin{pmatrix} 1 & b_{01} & \dots & b_{0m} \\ 0 & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

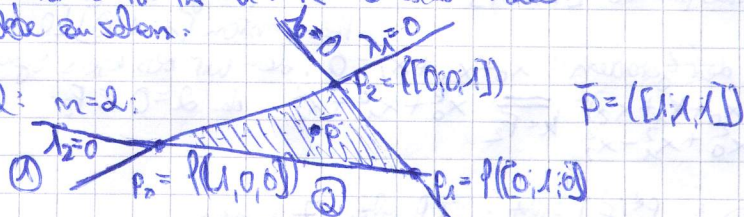
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{01} \\ \vdots \\ b_{0m} \end{pmatrix} B^t$$

4.11. Homogene Koordinaten und Kompaktheitskriterien

Es seien $p_0, \dots, p_m \in \mathbb{R}^m \xrightarrow{p_0^{-1}} U_0 \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$
 und $p_{int} = \bar{p} = \frac{1}{m+1}(p_0 + \dots + p_m)$ der Schwerpunkt
 dieser Punkte. Wir betrachten:

$p_A: \mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ mit:
 $p_A([x_0: \dots: x_m]) = p_0^{-1}(p_i)$ und $p_A([1: \dots: 1]) = p_0^{-1}(\bar{p})$
 In der Karte $p_0 \circ p_A: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind dann alle
 Punkte zu sehen.

Beispiel: $m=2$:



Bzgl. affiner Koordinaten $p_i = (x_i, y_i)$ $i=0,1,2$.
 Also projektive Koordinaten $(1, x_i, y_i)$ wo die Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \quad \text{In der Tat: } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ x_0+x_1+x_2 \\ y_0+y_1+y_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \bar{x} = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m x_i = \frac{1}{3}(x_0+x_1+x_2)$$

Also $U = p_A^{-1}(U_0) = \{([x_0: x_1: x_2]) \mid \sum_{i=0}^2 x_i \neq 0\}$.
 Wir restizieren $U = \{([x_0: x_1: x_2]) \mid \sum_{i=0}^2 x_i = 1\}$

Das Bild der Dreiecks $\Delta = \{([x_0: x_1: x_2]) \mid \sum_{i=0}^2 x_i = 1, x_i \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$
 wird dabei von p_A die konvexe Hülle der Punkte $p_0, \dots, p_2$
 abgebildet. (Schattenfläche $p(\Delta)$)

Beschreibung der Flächen: z.B. Fläche ①: $x_0 > 0, x_1 < 0, x_2 < 0$
 ②: $x_0 > 0, x_1 > 0, x_2 < 0$

Also Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto x_0 p_0 + x_1 p_1 + x_2 p_2$
sind ein Spezialfall von homogenen Koordinaten.

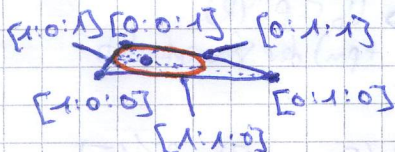
4.12. Ein endliche Körper F_q mit q Elementen hat $P(F_q)$ nur endlich viele Punkte:

F_q^{m+1} enthält $q^{m+1} - 1$ nicht Null verschiedene Vektoren und je $|F_q^*| = q - 1$ repräsentieren der gleichen LK.

$$\Rightarrow |P^m(F_q)| = \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} = 1 + q + \dots + q^m$$

$P^1(F_2)$ $P^2(F_2)$
 $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

Beispiel: Die Fano-Ebene $P^2(F_2)$
hat $1+2+4=7$ Punkte:



$|P^1(F_2)| = 1+2=3$ Punkte
 $\Rightarrow$ Jede Gerade enthält 3 Punkte.
Durch jedem Punkt gehen 3 Geraden.

„Mittelpunkt“ $[1:1:1]$

Über F_2 liegen die Punkte mit Koordinaten $[1:1:0], [0:1:1], [1:0:1]$

auf der Geraden: $x_0 + x_1 + x_2 = 0$, den wir als Kreis symbolisieren.

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1 + x_2)^2 &= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \quad \text{da } 2=0 \in F_2 \\ &= x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ In $P^2(F_2)$ gibt es 7 Punkte 7 Geraden.

Jede Gerade enthält drei Punkte, durch jeden Punkt gehen drei Geraden.

4.13. Hyperflächen in $P^m(K)$

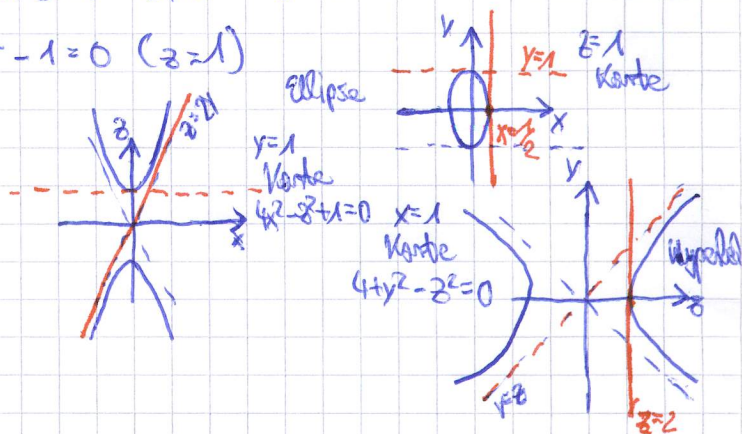
Sei $f(x_0, \dots, x_m) \in K[x_0, \dots, x_m]$ ein Polynom mit $(m+1)$ -Variablen. Wir können f nicht als Kurve in $P^m(K)$ auffassen, denn für einen Punkt $p = (p_0 : \dots : p_m)$

hängt $f(p_0, \dots, p_m)$ von der Wahl des Repräsentanten $(p_0, p_1, p_m) \in (F_0 : \dots : F_m)$ ab. Aber für homogene Polynome $f(x_0, \dots, x_m) = \sum_{a_0+\dots+a_m=d} f_{a_0, \dots, a_m} x_0^{a_0} \dots x_m^{a_m}$ von Grad d gilt:

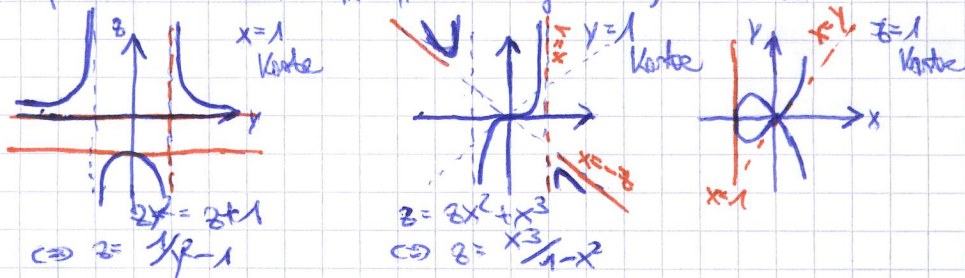
$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_m) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_m)$ Also das Nullstellengebild (Verdrünnungsumgegend) $V(f) = \{p \in P^m(K) \mid f(p) = 0\}$ ist für homogene Polynome wohldefiniert. Man nennt $V(f)$ eine Hyperfläche vom Grad d in $P^m(K)$.

Beispiel: $n=2$: $f(x_0, x_1, x_2) \in K[x_0, x_1, x_2]$ homogen.
 Um $V(f)$ zu verstehen, betrachten wir die Durchschnitte
 $C \cap U_0, \dots, C \cap U_2$
 $= \{ (x_1, x_2) \mid f(1, x_1, x_2) = 0 \}$ usw.

Beispiel: $4x^2 + y^2 - 1 = 0$ ($z=1$)



Beispiel: $y^2 = x^2 + x^3 \in K[x, y]$ homogen $zy^2 = zx^2 + x^3$



Allgemein: $f \in K[z_1, \dots, z_n] \in K[x_0, \dots, x_n]$ Polynom vom Grad d
 $f(x_0, \dots, x_n) = x_0^d \cdot f(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$
 $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ homogen
 $f(x_1, \dots, x_n)$ $x_i = 1$ einsetzen.