

$1 \in K = T^0(V)$ ist das Einselement.

7.8. Historisch wurden Tensoren zuerst in der Physik eingeführt, allerdings nicht in der abstrakten Form, die wir bevorzugen. Es waren Größen (Vektoren), die sich unter Koordinatenwechsel spezifisch transformieren.

V Vektorraum ($K=R$) $V^* = \text{Hom}(V, K)$

Dann heißt ein Tensor $t \in V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q} =: T_q^p(V)$

p -fach q -variant und q -fach kontravariant.

$g \in \text{End}(V)$, $g: V \rightarrow V$, $V^* \xleftarrow{g^*} V^*$

$g \in GL(V) = \{g \in \text{End}(V) \mid g \text{ isomorph}\}$

$g: V \rightarrow V$, $(g^*)^{-1}: V^* \rightarrow V^*$

Also unter einem Automorphismus $g \in GL(V)$

$t = x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes x_1^* \otimes \dots \otimes x_q^*$

$gt = gx_1 \otimes \dots \otimes gx_p \otimes (g^*)^{-1}x_1^* \otimes \dots \otimes (g^*)^{-1}x_q^*$

In Basen: $g = L_g(N)$, $g^* = L_{g^*}(N^*)$

$gt = L_g(x_1) \otimes \dots \otimes L_g(x_p) \otimes L_{g^*}^{-1}(x_1^*) \otimes \dots \otimes L_{g^*}^{-1}(x_q^*)$

Selbst für kleine Räume $V = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^4$, kleine p, q wird das eine große Summe im Term der Basen.

8) Die äußere Algebra

8.1. Definition: Sei V ein K -Modul, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

Eine multilinear Abbildung

$f: V \times \dots \times V \rightarrow X$

k -Kopien heißt alternierend, wenn

$f(v_1, \dots, v_k) = 0$ für alle Tupel $(v_1, \dots, v_k) \in V \times \dots \times V$ für die ein Paar (i, j) existiert $i \neq j$ mit $v_i = v_j$

Beispiel: Die Determinante $\det: K^{n \times n} \rightarrow K$, $A \mapsto \det A$

ist eine alternierende Multilinearform auf $V \times \dots \times V$ mit $V = K^n$.

$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \det(a_1, \dots, a_n)$

8.2. Bemerkung: Für alternierende multilinear Abbildungen

$f: V \times \dots \times V \rightarrow X$ gilt:

$f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, \dots, v_{j-1}, v_j, \dots, v_n)$

$= -f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, \dots, v_{j-1}, v_i, \dots, v_n)$

Beweis: $0 = f(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_m)$
 $= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_m) + f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m)$
 $+ f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_m) + f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_m)$
 $= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) + f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_m)$

8.3. Definition: V K -Modul, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

Die k -te äußere Potenz von V ist K -Modul $\wedge^k V$ zusammen mit
 einer alternierenden Abbildung $\chi: V \times \dots \times V \rightarrow \wedge^k V$
 die folgende universelle
 Eigenschaft hat:

$\forall \varphi: V \times \dots \times V \rightarrow X$ alternierend, multiplikativ $\exists! \phi: \wedge^k V \rightarrow X$ sodass
 $\chi(x_1, \dots, x_k) \mapsto \phi(x_1, \dots, x_k)$
 $\chi \searrow \phi$
 $\wedge^k V \xrightarrow{\chi} X$
 $\downarrow \exists! \phi$
 X
 das Diagramm kommutiert.

8.4. Bemerkung: Bis auf kanonische Isomorphie ist $\wedge^k V$ durch die
 universelle Eigenschaft von $(\wedge^k V, \chi)$ eindeutig bestimmt.

8.5. Satz + Notation: Die k -te äußere Potenz $\wedge^k V$ existiert.
 Das Bild $\chi(v_1, \dots, v_k) \in V \times \dots \times V$ wird mit
 $\chi(v_1, \dots, v_k) \approx v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$ bezeichnet.

Beweis: Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts
 faktoriert χ (sodass $\wedge^k V$ existiert) über $V^{\otimes k}$.

$V \times \dots \times V \xrightarrow{\chi} V^{\otimes k}$
 $\searrow \chi$
 $\wedge^k V$
 Wir konstruieren $\wedge^k V$ als
 Quotient von $V^{\otimes k}$:

Sei $U \subset V^{\otimes k}$ der Untermodul, der von allen Tensoren der
 Form $t = v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_m$
 erzeugt, wobei $v_1, \dots, v_m, v \in V$ durchlaufen wird $i, j \in \{1, \dots, m\}$ $i \neq j$.
 Also $\wedge^k V = V^{\otimes k} / U$ und χ als Komposition von τ mit
 der Projektion $V^{\otimes k} \rightarrow V^{\otimes k} / U$, $t \mapsto t + U$.

Nach Wahl von U ist dann $\chi: V \times \dots \times V \rightarrow \wedge^k V$ alternierend,
 $(\wedge^k V, \chi)$ erfüllt die universelle Eigenschaft:

$\phi: V \times \dots \times V \rightarrow X$ alternierend, multiplikativ
 faktoriert nach der universellen Eigenschaft von $V^{\otimes k}$

$V \times \dots \times V \xrightarrow{\tau} V^{\otimes k}$
 $\searrow \phi$
 X

$\ker \tilde{\Phi} \supset U$, da $\tilde{\Phi}$ alternierend ist. $\tilde{\Phi}$ induziert also
 eine wohldefinierte Abbildung $\tilde{\Phi}: V \otimes K/U \rightarrow X$, $t+U \mapsto \tilde{\Phi}(t)$
 $\tilde{\Phi}(t) = \tilde{\Phi}(t+U)$.
 Die Eindeigkeitsbedingung von $\tilde{\Phi}$ folgt aus der Eindeigkeitsbedingung von Φ .

Folgerung aus dem Beweis: $N^k V$ wird von Elementen
 $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ erzeugt, denn $V \otimes K$ wird von Tensoren
 $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ erzeugt.

Neben der Multilinearität erfüllen diese die Rechenregeln

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_k = -v_1 \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_k$$

$$\text{und } v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_k = 0$$

Zum Beispiel: $k=2$ $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$
 $v_i \wedge v_i = 0 \in N^2 V$

8.6. Satz: Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen
 K -Modulen induziert eine lineare Abbildung
 $N^k f: N^k V \rightarrow N^k W$ sodass das Diagramm
 kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
 v_1 \dots \wedge v_k & \xrightarrow{\lambda} & N^k V \\
 \downarrow \lambda \dots \lambda f & & \downarrow N^k f \\
 w_1 \dots \wedge w_k & \xrightarrow{\lambda} & N^k W
 \end{array}$$

$$(N^k f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_k)$$

Beweis: Die Komposition

$$\begin{array}{ccc}
 v_1 \dots \wedge v_k & \xrightarrow{\lambda} & N^k V \\
 \downarrow \lambda \dots \lambda f & \searrow & \downarrow N^k f \\
 w_1 \dots \wedge w_k & \xrightarrow{\lambda} & N^k W
 \end{array}$$

ist alternierend, folgernd
 also über $N^k V$ nach
 der universellen Eigenschaft.

8.7. Satz: K Körper, $V \cong K^m$ ein K -VR mit Basis $e_1, \dots, e_m$.
 Dann ist $N^k V$ ein K -VR der Dimension $\binom{m}{k}$
 mit Basis $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m\}$

Beweis: Nach 6.11, 7.5 wird $V \otimes K$ von Elementen
 $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$ $i_1, \dots, i_k \in \{e_1, \dots, m\}$ erzeugt.
 Also $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ $i_1, \dots, i_k \in \{e_1, \dots, m\}$ erzeugen.
 Sind 2 Indizes gleich, dann $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = 0$
 Also reicht $i_1, \dots, i_k$ zu betrachten mit $\{i_1, \dots, i_k\} = k$
 Wegen der Assoziativregel reicht es mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$
 zu betrachten, also die angegebenen Basiselemente erzeugen.

Bleibt die lineare Unabhängigkeit dieser Elemente zu zeigen.

Für jede k -elementige Teilmenge $I \subset \{1, \dots, k\}$

$I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$ betrachten wir die Projektion

$$V \rightarrow W_I = \langle e_i, i \in I \rangle \cong K^{\#I}$$

$$e_i \mapsto \begin{cases} e_i, i \in I \\ 0, i \notin I \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\begin{array}{ccc} K^{\#I_1} \times \dots \times K^{\#I_k} & \xrightarrow{\quad} & K^{\#V} \\ \downarrow p_1 \times \dots \times p_k & \searrow & \downarrow \\ W_{I_1} \times \dots \times W_{I_k} & \xrightarrow{\text{det}} & K \\ \cong K^{\#I_1} \times \dots \times K^{\#I_k} & & \end{array}$$

Für Vektoren $a_1, \dots, a_k \in K^{\#V}$
 $p_i(a_1), \dots, p_i(a_k) \in W_{I_i} \cong K^{\#I_i}$

Stellen wir die $a_1, \dots, a_k$ für

wasche Basis dar:

$a_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, A = (a_{ij}) \in K^{n \times k}$, deren Spalten
 den Vektoren entsprechen, dann entspricht $p_i(a_1), \dots, p_i(a_k)$
 der Untermatrix $A_i = (a_{ij})_{j=1, \dots, k, i \neq i_1, \dots, i_k}$
 und die Komposition entspricht der Abbildung $A \mapsto \det A_i$
 Unter dieser Abbildung wird ein Tupel $a_1, \dots, a_k \in K^{\#V}$
 $J = \{j_1 < \dots < j_k\}$ auf Null abgebildet, außer $J=I$.

$$A \mapsto \det(A_i) = \begin{cases} 0, i \neq I \\ 1, i = I \end{cases}$$



$$\begin{array}{ccc} K^{\#V} & \rightarrow & K \text{ erfüllt} \\ e_{j_1}, \dots, e_{j_k} & \mapsto & \begin{cases} 0, j \neq I \\ 1, j = I \end{cases} \end{array}$$

$$e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$$

$\Rightarrow e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$ ist von den
 anderen linear unabhängig.

$\Rightarrow$ Die Elemente

$$e_i = e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \text{ mit } I = \{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$$

bilden eine Basis von $K^{\#V}$

$$\text{Insbesondere: } \dim K^{\#V} = \binom{m}{k}.$$

8.8. Corollar: Sei V endlichdimensionaler K -VR.

Dann ist $\dim V = \max \{k \mid K^{\#V} \neq 0\}$

$$\text{Beweis: } m = \dim V, \max \{k \mid \binom{m}{k} \neq 0\} = m \quad \square$$