

1) Die Jordan'sche Normalform

1.1. Erinnerung: Mit $K^{n \times n}$ bezeichnen wir den Vektorraum der $n \times n$ -Matrizen

$$GL(n, K) = \{ A \in K^{n \times n} \mid A \text{ invertierbar} \}$$

$$= \{ A \in K^{n \times n} \mid \det A \neq 0 \}$$

$GL(n, K)$ operiert auf $K^{n \times n}$ durch Konjugation:

$$GL(n, K) \times K^{n \times n} \rightarrow K^{n \times n}$$

$$(S, A) \rightarrow SAS^{-1}$$

Die Konjugationsklasse ist die Bahn von A unter dieser Operation.

B ist in dieser Konjugationsklasse genau dann, wenn

$$B = SAS^{-1}, S \in GL(n, K)$$

Im letzten Semester hatten wir Matrizen charakterisiert, die über K diagonalisierbar sind.

1.2. Satz: Diagonalisierbarkeitssatz:

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist über K diagonalisierbar, d.h.

$\exists S \in GL(n, K)$ sodass $SAS^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ genau dann, wenn

1) $\chi_A(t) = \det(A - tE) \in K[t]$ über K vollständig in Linearfaktoren zerfällt,

2) Für jede Nullstelle λ in χ_A (d.h. jeder Eigenwert von A) ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit $m(\chi_A, \lambda)$ von der Nullstelle λ von χ_A .

Dabei ist für $p \in K[t]$: $m(p, \lambda) = \max \{ k \geq 0 \mid (t - \lambda)^k \text{ teilt } p \}$
Die erste Bedingung können wir stets erzwingen, indem wir von K zu einem Erweiterungskörper L übergehen.

1.3. Definition: Sei K ein Körper:

K heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht konstante Polynom $p \in K[t]$ eine Nullstelle hat, äquivalent wenn jedes Polynom $p \in K[t]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, d.h.,

$$p(t) = c \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i), \quad c, \lambda_i \in K$$

c heißt Linear-Koeffizient.

Beispiel: 1) $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.

2) K beliebiger Körper, dann existiert ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper $\bar{K} \supset K$.

Die zweite Bedingung lässt sich nicht erzwingen.

Beispiel: Sei A eine Stuhlebene Dreiecksmatrix, dann gilt:

$$\chi_A(t) = (-1)^m t^m \quad \text{oder}$$

~~aber~~ $\text{Eig}(A, 0) = \text{Ker } A \neq K^m$, wenn $A \neq 0$
 Aber dann $\text{Eig}(A, 0) = \text{ml}(\chi_A, 0)$ in diesem Fall.

Die Normalform für algebraisch abgeschlossene Körper ist die sogenannte Jordansche Normalform.

1.4. Definition: Eine $r \times r$ -Matrix $J = J(\lambda, r) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{r \times r}$
 nennt man einen Jordan-Block der Größe r .

Beispiel: $J(\lambda, 1) = (\lambda)$, $J(\lambda, 2) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $J(\lambda, 3) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

1.5. Satz: Jordansche Normalform

Sei A eine $n \times n$ -Matrix, deren charakteristisches Polynom $\chi_A(t) \in K[t]$
 über K vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Dann existiert eine Matrix $S \in GL(n, K)$, sodass

$$SAS^{-1} = J = \text{Jordan-Normalform}$$

eine Blockdiagonalmatrix aus Jordan-Blöcken.

Wobei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ nicht notwendig verschiedene Eigenwerte von A .

Bis auf die Reihenfolge der Blöcke ist die Normalform eindeutig.

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, r_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_k, r_k) \end{pmatrix} \quad \text{Hier ist } r_i \text{ die Größe des } i\text{-ten Blocks}$$

Bemerkung: $\chi_A(t) = \chi_J(t) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - t)^{r_i}$

Der Beweis des Satzes wird einige Zeit beanspruchen und zerlegt sich in zwei Teile:

1) Zerlegung in Hauptdiagonale

2) Klassifikation von nilpotenten Matrizen

1.6. Definition: Eine Matrix $N \in K^{n \times n}$ heißt nilpotent, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $N^k = 0$. Das kleinste solche k heißt dann Nilpotenzindex von N .

1.7. Beispiel: 1) $J(0, m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$N^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^m = 0$$

$J(0, k)$ ist nilpotent mit Index m .

- 2) Nilpotenz: N eine strikte obere Dreiecksmatrix
 $N = (n_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ & 0 \end{pmatrix}$ d.h. $n_{ij} = 0$ für $i \leq j$
 ist nilpotent.
- 3) Ist $N \in K^{n \times n}$ ist nilpotent, dann ist auch $SN S^{-1}$ nilpotent.
 $(SN S^{-1})^k = S N^k S^{-1} = 0$ wenn $N^k = 0$

1.8. Sei V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus
 (zum Beispiel $f = L_{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$ auf $V = K^n$)

Der Eigenraum von f zu $\lambda \in K$ wird durch

$$\text{Eig}(f, \lambda) = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \} = \ker(f - \lambda \text{id}_V)$$

definiert. Für den Hauptraum betrachten wir Potenzen von $(f - \lambda \text{id}_V)$:

Definition: Sei f ein Endomorphismus von V und $\lambda \in K$ heißt
 $\text{Hau}_f(\lambda) = \bigcup_{s=1}^{\infty} (\ker(f - \lambda \text{id}_V)^s) \subset V$
 der Hauptraum von f bzgl. λ .

1.9. Bemerkungen:

1) $\text{Hau}_f(\lambda) = 0$ genau dann, wenn λ kein Eigenwert von f ist.
 In der Tat, dann $f - \lambda \text{id}_V$ (invertierbar) ein Isomorphismus
 und deshalb sind auch alle Potenzen $(f - \lambda \text{id}_V)^s$ invertierbar.
 (invertierbar bedeutet injektiv)

2) Wegen: $\ker(f - \lambda \text{id}_V) \subset \ker(f - \lambda \text{id}_V)^s \subset V$
 ist die Vereinigung ein Untervektorraum von V .
 Folger: Wenn $\dim V < \infty$ dann gibt es ein s_0 , sodass
 $\ker(f - \lambda \text{id}_V)^s = \ker(f - \lambda \text{id}_V)^{s+1} \quad \forall s \geq s_0$
 In der Tat die Dimensionen
 $\dim \ker(f - \lambda \text{id}_V)^s \leq \dim \ker(f - \lambda \text{id}_V)^{s+1}$
 können wegen $\dim V < \infty$ nur endlich stark ansteigen sein.

3) Ist f durch eine Matrix f in Normalform gegeben und λ Eigenwert,
 dann ist nach Umordnung der Körper

$$f - \lambda \text{id}_V = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & * \\ & 0 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 - \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_k - \lambda & 1 \end{matrix}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(e_1) & & \\ & f(e_i - \lambda e_i) & \\ & & f(e_k - \lambda e_k) \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda_1 \neq \lambda, \dots, \lambda_{i-1} = \lambda, \lambda_i \neq \lambda, \dots, \lambda_k \neq \lambda$
 $\lambda_1 = \dots = \lambda_{i-1} = \lambda, \lambda_i \neq \lambda \neq \lambda_k$

$$(J - \lambda E)^S = \begin{pmatrix} 0 & \\ & J(\lambda_1 - \lambda_2, j)^S \\ & & J(\lambda_1 - \lambda_2, j)^S \end{pmatrix} \quad \text{für } S \text{ genügend groß.}$$

Der Hauptraum von J bezüglich λ besteht aus den Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m$ deren Komponenten Null sind, für die Spalten zu anderen λ_j mit $\lambda_j \neq \lambda$ dann alle $J(\lambda_i - \lambda_j, j)^S$ sind invertierbar.

$$\text{Kern}(J(\lambda)) = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m \mid x_j = 0 \text{ für } j \geq r_1 + r_2 + \dots + r_{i-1} + j\}$$

1.10. Satz: Sei $f \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums. $\lambda \in K$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_f

$(\lambda = M_A^A(f))$ $\chi_f = \chi_A(f)$ und $r = m(\chi_f, \lambda)$. Für $W = \text{Kern}(f - \lambda \text{id}_V)$ gilt dann:

- $\text{Kern}(f - \lambda \text{id}_V) = \text{Kern}(f - \lambda \text{id}_V)^r$
- $\dim W = r$
- $f(W) \subset W$
- Das charakteristische Polynom von $f|_W \in \text{End}(W)$

$$\chi_{f|_W}(t) = \pm (t - \lambda)^r$$
- $(f|_W - \lambda \text{id}_W)^r = 0 \in \text{End}(W)$

1.11. Lemma: Sei f wie in 1.10.

Dann existiert eine Basis

$A = \{v_1, \dots, v_m\}$ von V , sodass

$$M_A^A(f) = \begin{pmatrix} \lambda & * & c \\ 0 & \lambda & c \\ & & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

λ kein Eigenwert von 0.

$$S = \begin{pmatrix} K^n & \xrightarrow{b} & K^n \\ \uparrow \scriptstyle M_A^A(f) & & \downarrow \scriptstyle S \\ V & \xrightarrow{f} & V \\ \uparrow \scriptstyle A & & \uparrow \scriptstyle A \\ K^n & \xrightarrow{A} & K^n \end{pmatrix} \quad S = M_B^B(f)$$

Beweis: Sei v_1 Eigenvektor zu λ . Ergänze v_1 zu einer Basis

$A = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ von V .

$$M_A^A(f) = \begin{pmatrix} \lambda & A \\ 0 & A' \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_f = \chi_A = (\lambda - t) \chi_{A'} \quad m(\chi_A, \lambda) = r-1$$

Induktion nach r : $r=1$, λ kein Eigenwert von A'

$r>1$, nach Voraussetzung gibt es

$\{v'_2, \dots, v'_m\}$ von $\{v_2, \dots, v_m\}$, sodass

mit $A' = \{v_1, v'_2, \dots, v'_m\}$

$$M_{A'}^{A'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \lambda & * \\ & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} q \\ r-q \\ m-r \end{matrix}$$

Beweis 1.10: A, r wie in Lemma 1.11, $A = M_A^A(p)$

$$1) B = A - \lambda E = M_A^A(p - \lambda \text{id}_V) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & c \\ \hline 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & C \\ \hline 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Nulpotent und $\tilde{D}$ invertierbar

$$B^s = \begin{pmatrix} M^s & * \\ 0 & \lambda^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \lambda^s \end{pmatrix} \leq t$$

$$\ker(B^t) = \langle e_1, \dots, e_t \rangle$$

$$\ker((p - \lambda \text{id}_V)^t) = \langle v_1, \dots, v_t \rangle = W = \text{Kern}(p, \lambda)$$

$$2) A = M_A^A(p) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \\ \hline 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow p(W) \subset W$$

$$3) x|_W = (x - \lambda \text{id}_W)^t$$

$$4) M_{\{v_1, \dots, v_t\}}^{\{v_1, \dots, v_t\}}(p|_W) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (p|_W - \lambda \text{id}_W)^t = 0$$

1.12. Satz (Zerlegung in Haupträume):

$p \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K -Vektorraums V . $\chi_p(t)$ in $K[t]$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren. $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von p .
Dann ist $V = \text{Kern}(p, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Kern}(p, \lambda_k)$.

$$1.13. \text{ Beweis: } \chi_p = \pm (t - \lambda_1)^{r_1} \dots (t - \lambda_k)^{r_k}$$

$$W_i = \text{Kern}(p, \lambda_i)$$

Aus Satz 1.10 folgt: $\dim W_i = r_i$, $n = \dim V$

$$n = \deg \chi_p(t) = r_1 + \dots + r_k$$

Es reicht zu zeigen, dass $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_k) = \{0\} \quad \forall i = 1, \dots, k$

durch Einschränkung $i=1$ $V_i = V_2 + \dots + V_k \in W_1 \cap (W_2 + \dots + W_k)$

$v_i \in W_i$ Zu zeigen ist $v_i = 0$.

$$g = (p - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_2} \circ \dots \circ (p - \lambda_k \text{id}_V)^{r_k}$$

Aus Satz 1.10 folgt: $\forall i \quad p(W_i) \subset W_i$

$$\Rightarrow (p - \lambda_1 \text{id}_V)(W_i) \subset W_i \quad (p - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1}(W_i) = 0$$

$$\Rightarrow g(v_k) = 0, \quad g(v_{k-1}) = (p - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_2} \circ \dots \circ (p - \lambda_k \text{id}_V)^{r_k}(v_{k-1})$$

$$\Rightarrow g(v_{k-1}) = 0 = g(v_2) = g(v_k)$$

$$= v_{k-1} \in W_{k-1}$$

$$g(v_i) = g(v_2) + \dots + g(v_k) = 0$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sind keine Eigenwerte von $p|_{W_i}$

$$\Rightarrow (p - \lambda_1 \text{id}_V)|_{W_i} \in \text{End}(W_i) \text{ ist homomorphismus}$$

$$\Rightarrow g(v_i) = 0 \Rightarrow v_i = 0 \Rightarrow W_1 \cap (W_2 + \dots + W_k) = \{0\}$$

1.14. Bemerkung: 1) Der Satz über die Jordan-Normalform wird dadurch gezeigt, dass die Konjugationsklassen von Matrizen der Gestalt

$$A = \lambda E + N, \quad N \text{ nilpotent.}$$

2) Da $SAS^{-1} = S(\lambda E + N)S^{-1} = \lambda E + SNS^{-1}$ nicht es Konjugationsklassen von nilpotenten Matrizen zu Konjugationsklassen.

Wir wollen zeigen: Jede nilpotente Matrix $N \in \text{End}(V)$ mit $\dim V = n$ ist konjugiert zu J der Form:

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, m_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_k, m_k) \end{pmatrix} = SNS^{-1}, \quad S \in GL(V)$$

$n = m_1 + \dots + m_k$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (1 - 2 \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$

Beispiel: $n=3 \quad J = 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$

Diese Einschränkung: $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k \geq 1$

1.15. Definition: $n = m_1 + \dots + m_k$

$m_1 \geq \dots \geq m_k \geq 1$ heißt Partition von n .

Wir wollen zeigen: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Konjugationsklassen von nilpotenten } N \in K^{n \times n} \\ \text{Partitionen von } n \end{array} \right\}$

Beispiel: $n=5$

$$5=5$$

$$5=4+1$$

$$5=3+1+1$$

$$5=2+1+1+1$$

$$5=1+1+1+1+1$$

$$5=3+2$$

$$5=2+2+1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.16 Bemerkung: (Beweisidee) Sei $J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, m_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_k, m_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$e_1, \dots, e_n$ Standardbasis von K^n

$$\begin{array}{ccccccc} e_{m_1} & \xrightarrow{J} & e_{m_1+1} & \xrightarrow{J} & \dots & \xrightarrow{J} & e_1 \in \text{Eig}(J, 0) \\ e_{m_1+m_2} & \mapsto & \dots & \mapsto & e_{m_1+1} \end{array}$$

d.h. die Basis können wir den absteigend aus den Vektoren $e_{m_1}, e_{m_1+m_2}, \dots, e_{m_1+\dots+m_k}$ und der Wirkung von J konstruieren.

Also starten wir Vektoren für N , die sich analog dazu verhalten.

1.17. Sei $f \in \text{End}(V)$ nilpotent eines unbestimmtes r .

Satz: K -Vektorraum V mit Nilpotenzindex q . Dann gilt:

- 1) $V^p := \text{Ker}(f^p)$ definieren eine f -Korrespondenz zugeordnete Folge von Untervektorräumen: $0 = V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^{p-1} \subset V^p = V$
- 2) $f^{-1}(V^{p-1}) = V^p$, $f(V^p) \subset V^{p+1}$
- 3) $V^p/V^{p-1} \rightarrow V^{p-1}/V^{p-2}$ injektiv / korrespondenz

Beweis: 1) $v \in V^p \Leftrightarrow f^p(v) = 0 \Rightarrow f^{p+1}(v) = 0 \Leftrightarrow v \in V^{p+1}$
 $\Rightarrow V^p \subset V^{p+1}$

$$V^0 = \text{Ker}(f^0) = \text{Ker}(\text{id}_V) = \{0\}$$

$$V^q = \text{Ker}(f^q) = V \quad f^{q+1} \neq 0 \Rightarrow V^{q+1} \neq V^q$$

$$2) v \in V^p \Leftrightarrow f^p(v) = 0 \Leftrightarrow f^{p-1}(f(v)) = 0 \Leftrightarrow f(v) \in V^{p-1}$$

$$\text{Dies zeigt: } f(V^p) \subset V^{p-1}, \quad f^{-1}(V^{p-1}) = V^p$$

$$3) \text{ Nach (2): } f(V^p) \subset V^{p-1}, \quad f(V^{p-1}) \subset V^{p-2}$$

f wohldefiniert:

$$(2) v + V^{p-1} = w + V^{p-1} \Leftrightarrow v - w \in V^{p-1}$$

$$\Rightarrow f(v) - f(w) \in V^{p-2} \Rightarrow f(v) + V^{p-2} = f(w) + V^{p-2}$$

f injektiv:

$$(2) f^{-1}(V^{p-1}) = V^p \Rightarrow \forall v \in V^p \text{ mit } f(v) \in V^{p-1}$$

$$\text{gilt: } v + V^{p-1} = V^{p-1} \Rightarrow f \text{ injektiv}$$

1.18. Corollar: Mit den Voraussetzungen wie Satz 1.17 bilden die $m_i = \dim(V^i/V^{i-1})$ eine f -Korrespondenz zugeordnete Partition von $n = \dim V$. Es ist

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_q \geq 1, \quad n = m_1 + \dots + m_q$$

$$\text{Beweis: } V^p/V^{p-1} \xrightarrow{(3)} V^{p-1}/V^{p-2}$$

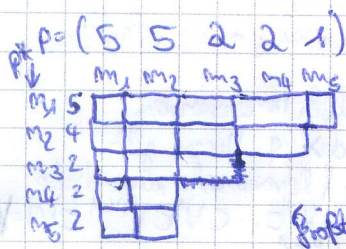
$$\Rightarrow m_p \leq m_{p-1}, \quad m_q = 1, \text{ weil } V^{q-1} \subsetneq V^q$$

$$\text{Dimensionalformel } \dim V^p = \dim V^{p-1} + \dim V^p/V^{p-1}$$

$$\Rightarrow \text{Induktion: } \dim V^p = m_1 + \dots + m_p$$

Diese Partition ist nicht die Partition von m_i die zu den Jordanzblöcken gehört, sondern die dessen duale Partition.

1.19. Definition: Sei $P = (m_1, \dots, m_q)$ eine Partition von n . Die zu P duale Partition von n $P^* = (m_1, \dots, m_k)$ mit $m_j = |\{i \mid m_i \geq j\}|$ $j = 1, \dots, k$



$p \leftrightarrow p^*$
Spiegelung an der Diagonalen

$\Rightarrow m_1 = \dim \ker N = \dim \text{Eig}(N, 0)$
= Anzahl Jordankblöcke
Größter Jordankblock ist $m_1 \times m_1$

1.20. Satz: Sei $P \in \text{End}(V)$ nilpotent, $\dim V = n$ mit Nilpotenzindex q . $p = (m_1, \dots, m_q)$ $m_i' = \dim V_i - \dim V_{i-1}$
 $V_i = \ker(P^i)$ und $p^* = (m_1, \dots, m_q)$ die zu p duale Partition von n . Dann existiert eine Basis A von V sodass
 $M_A(P) = J$

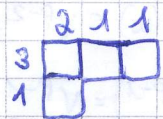
$$J = \begin{pmatrix} J(0, m_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(0, m_q) \end{pmatrix}$$

Beispiel: $A = SJS^{-1}$
 $N = SJS^{-1}$

$S \in GL(n, K)$ bzw. $GL(V)$

1.21. Beispiel: $P \in \text{End}(K^4)$
 $m_1 = 2$
 $m_2 = 1$
 $m_3 = 1$

$i \mid 0 \ 1 \ 2 \ 3$
 $\dim V_i \mid 0 \ 2 \ 3 \ 4$

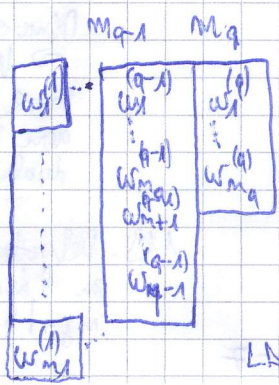


$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Beweis (1.20): Satz (1.17) $\Rightarrow$ Induktion

$V_{q-1} \xrightarrow{P} V_{q-2} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow V_0 = V^1$
Seien $w_1^{(q)}, \dots, w_{m_q}^{(q)} \in V_q$ sodass $w_i^{(q)} + V_{q-1} \in V_q/V_{q-1}$
Seien $w_1^{(q-1)} = P(w_1^{(q)}), \dots, w_{m_q}^{(q-1)} = P(w_{m_q}^{(q)})$
 $\Rightarrow \exists w_1^{(q-1)}, \dots, w_{m_q}^{(q-1)} \in V_{q-1}$ sodass $w_i^{(q-1)} + V_{q-2}$ Basis von V_{q-1}/V_{q-2} bilden.
Induktiv: $w_i^{(j)}$ Basis von V_j .

Wählen wir nun i -ten Schritt
 $w_1^{(q-i)}, \dots, w_{m_{q-i}}^{(q-i)} \in V_{q-i}$ gewählt,
dann betrachten wir
 $w_1^{(q-i)} = P(w_1^{(q-i+1)}), \dots, w_{m_{q-i}}^{(q-i)} = P(w_{m_{q-i+1}}^{(q-i+1)})$
und ergänzen diese mit Vektoren
 $w_{m_{q-i+1}+1}^{(q-i)}, \dots, w_{m_{q-i}}^{(q-i)} \in V_{q-i}$
zu einem Reparatorensystem einer
Basis von V_{q-i}/V_{q-i-1}



Diese Vektoren sind linear unabhängig $\sum_{i=1}^q \lambda_i w_i^{(q)} = 0$
 so müssen, da $w_1^{(q)}, \dots, w_m^{(q)}$ eine Basis von V^{q-1}/V^{q-2} bilden, weil
 alle anderen Vektoren schon in V^{q-1} sind, die Koeffizienten $\lambda_1^{(q)}, \dots, \lambda_m^{(q)}$
 alle Null sein. Also ist die Summe eine Summe von Vektoren in V^{q-1}
 und die Projektion der Gleichung auf V^{q-1}/V^{q-2} zeigt, dass alle
 $\lambda_i^{(q-1)} = 0$ usw.

$\Rightarrow$ Diese Vektoren bilden Basis von V , da $\dim V = n$ und $(m_1, \dots, m_q)$
 eine Partition von n bilden. Wir nummerieren nun diese Basis-
 vektoren wie folgt:

$$\begin{matrix} m_1 & v_1 & v_2 & \dots & v_{m_1} \\ m_2 & v_{m_1+1} & v_{m_1+2} & \dots & v_{m_1+m_2} \\ m_3 & v_{m_1+m_2+1} & & & \\ \vdots & & & & \end{matrix}$$

Betraglich dieser Basis gilt:

$$M_A^{-1}(f) = \begin{pmatrix} f(0, m_1) \\ \vdots \\ f(0, m_k) \end{pmatrix}$$

$$\text{d.h. ist } k = \dim V^1 \\ = \dim \text{Eig}(p_{f(0)})$$

Zusatz: Ist $V = K^m$ und f durch eine nilpotente Matrix gegeben, dann
 ist $S = (v_1 | \dots | v_m) \in K^{m \times m}$ die Basiswechselmatrix, d.h.
 $f = S^{-1}NS$ bzw. $SfS^{-1} = N$

$$\begin{array}{ccc} \text{Beweis:} & K^m & \xrightarrow{N} K^m \\ & \uparrow \text{ } f & \uparrow S = P_A \\ & K^m & \xrightarrow{f} K^m \end{array} \Rightarrow f = S^{-1}NS$$

Satz: (Jordan'sche Normalform)

$\lambda \in \text{End}(K^m) \cong K^{m \times m}$, $\chi_\lambda(t) \in K[t]$ zerfalle in Linearfaktoren
 (ist erfüllt, wenn K algebraisch abgeschlossen ist.)
 Dann existiert eine Matrix $S \in GL(m, K)$, sodass

$$\begin{array}{ccc} GL(m, K) \times K^{m \times m} & \rightarrow & K^{m \times m} \\ (S, A) & \mapsto & SAS^{-1} \\ (T, (SA)^{-1}) & \mapsto & T(SA)^{-1}T^{-1} \\ (TS, A) & \mapsto & (TS)A(TS)^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} SAS^{-1} = f = (f(0, m_1) \\ \vdots \\ f(0, m_k)) \text{ (diagonal)} \\ (TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1} \end{array}$$

Der Beweis ist enorm!

- 1) Zerlegung in Hauptteile
- 2) Klassifikation von nilpotenten Matrizen

Beispiel zu 1.19:

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -3 & 17 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -7 & 6 & -10 \\ -2 & -5 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{ist nilpotent.}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 16+0+18-34 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad W_1 = \text{Kern}(N, 0) = \mathbb{R}^4$$

$$0 \subset \text{Kern}(N) \subset \text{Kern}(N^2) = \mathbb{R}^4$$

⇒ Berechnung von $\text{Kern } N$: $\begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -7 & 6 & -10 \\ 4 & 11 & -7 & 17 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{Kern } N = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergänzen mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zur Basis.

Partikeln: $2+2=4$ duale Partikeln zufällig gleich.

$$S^{-1} = T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -7 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 5/4 & -7/4 \\ 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Probe: $SNS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.22. Praktische Verfahren zur Berechnung der Jordan-Normalform
 Sei $A \in K^{n \times n}$. Der Beweis des Satzes gibt uns folgende
 Verfahren zur Berechnung der Jordan'schen Normalform.

1. Schritt: Faktorisieren des charakteristischen Polynom

$$\chi_A(t) = \det(A - tE) \text{ in Linearfaktoren:}$$

$$\chi_A(t) = \pm (t - \lambda_1)^{e_1} \dots (t - \lambda_n)^{e_s}$$

2. Schritt: Zerlegung $V = K^n$ in Haupträume

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k \quad W_i = \ker((A - \lambda_i E)^{e_i})$$

$$\text{Probe: dann } W_i = e_i$$

3. Schritt: Bestimmung der Funktion P von e_i für den Hauptraum W_i

$$0 \in \ker(A - \lambda_i E) \in \ker(A - \lambda_i E)^2 \subset \dots \subset \ker(A - \lambda_i E)^{q_i} = \dim e_i$$

$$m_p = \dim(A - \lambda_i E)^p - \dim(A - \lambda_i E)^{p-1}$$

$$\text{Dann gilt: } m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_q \text{ und } \sum_{i=1}^q m_i = e_i$$

4. Schritt: Bilden die Zunge Partition von $(m_1, \dots, m_q)$:

$$P = (m_1, \dots, m_q)$$

Dann folgt: die Jordanblöcke zum EW λ_i sind

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1, m_1} \\ \vdots \\ J_{\lambda_s, m_s} \end{pmatrix}$$

$$J_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, m_1) \\ \vdots \\ J(\lambda_i, m_i) \\ \vdots \\ J(\lambda_s, m_s) \end{pmatrix}$$

5. Schritt: Will man den Basiswechsel berechnen, so müssen wir
 mehr arbeiten: Wir starten mit

$$\ker(A - \lambda_i E)^{q-1} \subset \ker(A - \lambda_i E)^q = W_i$$

und ergänzen eine Basis von V_{q-1} mit m_q Vektoren

zu einer Basis von V_q . Anschließend betrachten wir

die Bilder dieser Vektoren unter $(A - \lambda_i E)$ in V_{q-1} und

ergänzen eine Basis von V_{q-2} und diesen Vektoren

zu einer Basis von V_{q-1} , dafür brauchen wir $m_{q-1} - m_q$
 neue Vektoren usw.

Im p -ten Schritt wählen wir $m_p - m_{p+1}$ neue Vektoren.

Wenn wir schließlich alle Vektoren gewählt, dann tragen wir diese
 in unsere Tabelle ein.

und bilden die Basis, indem wir

die Vektoren Zeile für Zeile

Spaltenweiseschreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & \\ 12 & \dots & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f(v_1^{(q)}) w_1^{(q)} \\ f(v_2^{(q)}) w_2^{(q)} \\ f(v_3^{(q)}) w_3^{(q)} \end{pmatrix}$$

6. Schritt: Haben Basis $A_1, \dots, A_s$ die Komplemente.

Bilden die Basis $A \neq A_1, A_2, \dots, A_s$

T mit Spalten in A , $S = T^{-1}$ und es gilt

$$J = SAS^{-1} \text{ (Probe)}$$

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ & & \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

1.23. Bemerkung:

Die Matrix S ist nicht eindeutig bestimmt: Bei der Basis-ergänzung können wir wählen, dann $\text{Eig}(A, \lambda_i)$ Jordanblöcke für Eigenwert λ_i geben

124. Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

1) $\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 4 & 3 \\ -1 & -t & -1 \\ 1 & 2 & 3-t \end{pmatrix} = -(t-2)^3$

2) $B = A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

0 $\in \text{Ker } B = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3) $C \in \text{Ker}(B^2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \subset \text{Ker } B^3 = R^3$
 $\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4) Partition: $(1, 1, 1)$ dual (3) $\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5) Ergänzen $\text{Ker} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ Basis von $\text{Ker } B_2 = V_{q-1}$

Zu Basis von $V_q = V_3 = R^3$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = w_1^{(q)}$

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ergänzen auf Basis)

$$B \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det T = 4$

$$S = T^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Der Satz von Cayley-Hamilton
 2.1. Sei $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und
 $q(t) = b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \dots + b_{n-1} t + b_n \in K[t]$ das Polynom.
 Wir können A in q einsetzen, d.h. dem Ausdruck
 $q(A) = b_0 A^n + b_1 A^{n-1} + \dots + b_{n-1} A + b_n I \in K^{n \times n}$ bilden.
 Insbesondere können wir A in sein charakteristisches Polynom
 $\chi_A(t) = \det(A - tI)$ einsetzen.

2.2. Satz (Cayley-Hamilton): Sei $A \in K^{n \times n}$, $\chi_A(t)$ das
 charakteristische Polynom, dann gilt: $\chi_A(A) = 0 \in K^{n \times n}$
 Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A$ $\chi_A(t) = t^2 - 4t + 1$

$$\chi_A(A) = A^2 - 4A + I = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Bemerkungen: 1) Vorsicht: Der Beweis

$$\chi_A(A) = \det(A - AI) = \det(A - A) = \det(0) = 0$$

ist schon deswegen falsch, weil $\chi_A(A) \in K^{n \times n}$
 während $\det(A - AI) \in K$

2) n -dimensionaler K -Vektorraum $V \in \text{End}(V)$
 mit $\chi_f(t) \in K[t]$ ($\chi_f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + (-1)^n t^0$),
 Dann besagt der Satz, dass $\chi_f(f) = a_0 \text{id}_V + a_1 f + \dots + (-1)^n f^n$
 $= 0 \in \text{End}(V)$

Beweis: Sei $V = K^n$ und $f \in \text{End}(V)$ der durch A gegebene
 Endomorphismus. $f = L_A^E(A)$

Zunächst ein Beweis, ~~der~~ unter der zusätzlichen Annahme, dass
 $\chi_A(t) = \chi_f(t) = \pm (t - \lambda_1)^{r_1} \dots (t - \lambda_k)^{r_k}$ vollständig in
 Linearfaktoren zerfällt. Dann gilt:

$$\chi_A(A) = \pm (A - \lambda_1 E)^{r_1} \dots (A - \lambda_k E)^{r_k}$$

Bemerkung: Da A und E kommutieren: $AE = EA$ gilt auch
 $(A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) = (A - \lambda_2 E)(A - \lambda_1 E)$, es kommt also nicht
 auf die Reihenfolge der Faktoren von $\chi_A(t)$ an.

Sei nun $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ die Zerlegung von V in Haupträume.

In 1) haben wir eingesehen, dass

- 1) $(f - \lambda_i \text{id}_V)(w_i) \in W_i$, dann $f(w_i) \in W_i$ und
- 2) $(f - \lambda_i \text{id}_V)^{r_i}(w_i) = 0$, dann $W_i = \ker((f - \lambda_i \text{id}_V)^{r_i})$

Wir betrachten nun ein beliebiges $v \in V$ und dessen Zerlegung
 $v = w_1 + \dots + w_k$ mit $w_i \in W_i$, dann gilt:

$$\chi_f(f)(v) = 0, \text{ dann } \chi_f(f)(w_i) = 0 \quad \forall i$$

$$\begin{aligned} \text{In der Tat: } & (f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1} \dots (f - \lambda_k \text{id}_V)^{r_k}(w_i) \\ &= (f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1} \dots (f - \lambda_i \text{id}_V)^{r_i} \dots (f - \lambda_k \text{id}_V)^{r_k}(w_i) \\ &= 0 \quad \text{nach 2)} \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \chi_K(h)(v) = \chi_K(h)(w_1 + \dots + w_n) \\ = \chi_K(h)(w_1) + \dots + \chi_K(h)(w_n) = 0$$

Da $\forall v$ beliebig wählbar, folgt $\chi_K(h) = 0 \in \text{End}(V)$

Für $K = \mathbb{C}$ ist damit nach dem Fundamentalsatz der Algebra die Behauptung gezeigt.

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt $\chi_A(h) = 0$.

Für Unterkörper von $\mathbb{C}$, etwa $\mathbb{R}$, gilt:

$\chi_A(h) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, denn es kommt nichts darauf an, woraus wir h betrachten. ($\mathbb{Q}^{n \times n} \subset \mathbb{R}^{n \times n} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$)

2.4. Ein zweiter Beweis von Cayley-Hamilton:

K beliebiger Körper, $f \in \text{End}(V)$, V endlichdimensionaler K -VR,

Wir müssen $\chi_f(f)(v) = 0 \in V \quad \forall v \in V$ zeigen.

bis $v=0$, so ist dies klar. Andernfalls können die Vektoren

$v_1 = v, v_2 = f(v), \dots, v_p = f^{p-1}(v) \in V$ nicht alle linear unabhängig sein, da $\dim V < \infty$. Sei p maximal gewählt, sodass $v_1, v_2 = f(v_1), \dots, v_p = f^{p-1}(v_1)$ linear unabhängig sind. Dann ist also $f^p(v_1) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p$

mit $c_1, \dots, c_p \in K$

Wir ergänzen $v_1, \dots, v_p$ zu einer Basis $v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n$ von V .

Bezgl. dieser Basis hat f die Matrixdarstellung:

$$\chi_f(h) = \chi_{\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}(h)$$

$$= \det(C - hE) \det(0 - hE) \\ = \chi_C(h) \chi_0(h) = \chi_0(h) \chi_C(h)$$

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_A^A(f) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} c_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & c_{pp} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} \end{array} \right) \begin{matrix} p \\ n-p \end{matrix}$$

$$2.5. \chi_f(h) = \det \begin{pmatrix} -h & c_1 \\ 1 & -h \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -h \\ & & & c_p & -h \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Entwicklung nach letzter Spalte}$$

$$\Rightarrow \chi_f(h) = (-1)^{p+1} [c_p h^{p-1} + c_{p-1} h^{p-2} + \dots + c_2 h + c_1] \\ = (-1)^p [h^p - c_p h^{p-1} + \dots + c_2 h + c_1] \quad \text{mit } c_1 = (-1)^{p+1} c_1$$

$$\text{Also: } \chi_f(h) = (-1)^p [h^p - (c_p h^{p-1} + \dots + c_2 h + c_1)]$$

$$\text{und somit } \chi_f(f)(v) = (-1)^p [f^p(v) - (c_p f^{p-1}(v) + \dots + c_2 f(v) + c_1 v)] \\ = (-1)^p [f^p(v) - (c_p v + \dots + c_2 v + c_1 v)] \\ = 0 \quad \text{nach } f^p(v_1) = c_1 v_1 + \dots + c_p v_p$$

$$\Rightarrow \chi_f(f)(v) = \chi_0(f) \chi_C(f)(v) = \chi_0(f)(0) = 0$$

2.6. Im Satz vom Cayley-Hamilton haben wir in das charakteristische Polynom eingesetzt. Wir studieren jetzt allgemein die Substitutionsabbildung $\varphi_A: K[t] \rightarrow K^{n \times n} = \text{End}(K^n)$
 $q \mapsto q(A)$

Da $K[t]$ ein unendlicher K -Vektorraum ist und $\dim K^{n \times n} = n^2 < \infty$ ist, gibt es Elemente im Kern - die Abbildung kann nicht injektiv sein.

z.B. $\varphi_A \in \text{Ker } \varphi_A$ Welche andere Polynome liegen in $\text{Ker } \varphi_A$?

2.7. Satz + Definition: Zu $A \in K^{n \times n}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom, ein Polynom heißt normiert, wenn der Leitkoeffizient 1 ist. Dieses normierte Polynom ist kleinsten Grades im $\text{Ker } \varphi_A$. Jedes andere Polynom $g \in \text{Ker } \varphi_A$ hat die Gestalt $g = q \cdot \varphi_A$ mit $q \in K[t]$
 φ_A heißt Minimalpolynom von A .

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ also folgt: $A^2 - 2A + E = 0$

Es folgt: $\varphi_A(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$
 $\chi_A(t) = (t-1)^3 = -(t-1)^3$ $\chi_A(t) = -(t-1)(\varphi_A(t))$

χ_A und φ_A unterscheiden sich nicht nur in Leitkoeffizienten.

2.8. (Mollat): Das Minimalpolynom teilt das charakteristische Polynom.
 Beweis: folgt aus Cayley-Hamilton.

Beweis von Satz 2.7: Da $\text{Ker } \varphi_A \neq \{0\}$, gibt es ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom kleinsten Grades wie $\text{Ker } \varphi_A$
 Die Differenz zweier normierter Polynome kleinsten Grades hat kleineren Grad, liegt in φ_A , ist also Null.

Satz: Division mit Rest in $K[X]$:

Seien $g, p \in K[X]$ Polynome, $p \neq 0 \in K[X]$

Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[X]$ mit

1) $g = qp + r$

2) $\deg r < \deg p$

Beweis in der Übung

$g = t^3 - 2t + 1, p = 2t^2 - t + 1 \Rightarrow$ Polynomdivision

Beweis von Satz 2.7: Sei $g \in \ker P_A$. Nach der Division mit Rest existieren $q, r \in K[t]$ sodass $g = qP_A + r$.
 Da $g(A) = 0$ und $(qP_A)(A) = (q(P_A(A))) = q(A)P_A(A) = 0$
 folgt $r(A) = 0$, da $r \in \ker P_A$. Da $\deg r < \deg P_A$ mit $r = 0$
 $\in K[t]$ nach Definition des Minimalpolynoms, dass $g = qP_A$.

2.9. Bemerkung: Analog definiert man $P_f \in K[t]$ das Minimalpolynom eines Endomorphismus $f \in \text{End}(V)$ eines endlichdimensionalen K -VR, indem man den Polynomomorphismus $f_t: K[t] \rightarrow \text{End}(V)$ betrachtet.
 $t \mapsto f$

konjugierte Matrizen $B = SAS^{-1}$, $S \in GL(n, K)$,
 $A, B \in K^{n \times n}$ haben das gleiche Minimalpolynom.
 $f_A: K[t] \rightarrow K^{n \times n} = \text{End}(K^n) \rightarrow \text{End}(K^n) = K^{n \times n}$
 $f_B: c \mapsto SBS^{-1}$

$f_B = \text{konjugierter Homomorphismus mit } S = f_A$
 $\ker f_A = \ker f_B$

2.10. Satz: Sei $A \in K^{n \times n}$, χ_A das charakteristische Polynom, P_A das Minimalpolynom, äquivalent sind:

- 1) λ ist eine Nullstelle von P_A
- 2) λ ist eine Nullstelle von χ_A
- 3) λ ist ein Eigenwert von A

~~Beweis:~~ 1) $\Rightarrow$ 2) ist klar, da $\chi_A = P_A \cdot q$.
 2) $\Rightarrow$ 3) wissen wir aus LA-1.
 Bleibt 3) $\Rightarrow$ 1) zu zeigen:

Sei λ Eigenwert und v der zugehörige Eigenvektor: $Av = \lambda v$
 $v \neq 0$. Ergänzen von v zu einer Basis $v_1 = v, v_2, \dots, v_m$ von K^n .
 Bezüglich dieser Basis wird die lineare Abbildung $L(A)$ durch
 eine Matrix $B = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \end{pmatrix}$

$$B^p = \begin{pmatrix} \lambda^p & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus $P_A = P_B$ folgt also
 $= t^k + b_{k-1}t^{k-1} + \dots + b_0$ und

$P_B(B) = 0$ folgt, wenn $(k, 1)$ Eintrag betrachten
 $P_B(\lambda) = 0$

2.11. Satz: Sei $A \in K^{n \times n}$, dessen Minimalpolynom bzw. charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Dann zerfällt auch χ_A bzw. P_A vollständig in Linearfaktoren, geschrieben $P_A(t) = (t - \lambda_1)^{s_1} \dots (t - \lambda_k)^{s_k}$ wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Nullstellen sind und s_i die maximale Größe eines Jordanblocks zum Eigenwert λ_i ist.

Beweis: Wir dürfen annehmen, dass A in Jordansche Normalform ist. mit B_j Jordanblöcken zu nicht notwendig verschiedenen Eigenwerten. $P_A = P_B$

$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Das Minimalpolynom wird von allen Minimalpolynomen der Blöcke geteilt.

$$B_j = J(\lambda, s) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow P_{B_j}(t) = (t - \lambda)^s \text{ da}$$

$\Rightarrow$ Das Polynom $(t - \lambda_1)^{s_1} \dots (t - \lambda_k)^{s_k}$ teilt das Minimalpolynom von B . Andererseits gilt $(B - \lambda_1 E)^{s_1} \dots (B - \lambda_k E)^{s_k} = 0$, da dies für alle Blöcke gilt.

$(B - \lambda_1 E)^{s_1} \dots (B - \lambda_k E)^{s_k} = 0$, da dies für alle Blöcke gilt.

2.12 Beispiel: Sei $A \in K^{n \times n}$ mit $A^2 = A$ (Man sagt A ist idempotent). Das Minimalpolynom $P_A(t)$ ist also ein Teiler von $t^2 - t = (t - 1)t$. $\Rightarrow$ Alle Eigenwerte von A sind $\in \{0, 1\}$ und jeder Jordanblock von A hat Größe ≤ 1 .

$$\exists S \in GL(n, K), S A S^{-1} = J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & 0 \\ & \boxed{1} & \\ 0 & & \boxed{0} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{0} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{dim Eig}(A, 1) \\ \text{dim Eig}(A, 0) \end{array} \right.$$

Also A ist die Projektion auf einen Unterraum von $K^{n \times n}$

2.13. Bemerkungen: 1) Die Abbildungen $C^{n \times n} \ni A \rightarrow J \in C^{n \times n}$ ist nicht stetig: $A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Dann hat A_t für $t \neq 0$ die Jordansform $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} A_t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_t$$

$$\text{Nur } A_0 = J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq J_t$$

Numerisch ist daher schwierig die Jordanform auszurechnen.

① Wir betrachten die Abbildung $X: C^{n \times n} \rightarrow C^n$

$A \mapsto$ Koeffizienten von χ_A

Koeffizienten von $\chi_A: (a_{11} + \dots + a_{nn}, a_{12} - a_{21}, \dots, \det A)$

χ ist auf dem Bahnen der Operationen

$$GL(n, C) \times C^{n \times n} \rightarrow C^{n \times n} \quad \text{konstant.}$$

$$(S, A) \rightarrow SAS^{-1}$$

Gibt es andere Funktionen, die auf den Bahnen konstant sind?

Für Polynomfunktionen auf $C^{n \times n}$ gilt folgendes:

$$R = C[X_{ij}] \quad i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, n$$

der Polynomring in n^2 -Variablen.

$$X = (x_{ij})_{C^{n \times n}} \rightarrow \text{"gemeinsame" } n \times n \text{-Matrix}$$

$$\text{Zu } S \in GL(n, C) = G$$

$$y_{ij} \rightarrow C$$

$$x_{ij}$$

y_{ij} ist der ij -te Eintrag der Matrix SXS^{-1} , also ein Element von $C[X_{ij}] = R$

$f(x_{ij}) \in R$, dann betrachte $f^S \in R$ das Polynom

$$f^S = f(y_{ij}). \text{ Also das Bild unter dem}$$

Substitutionshomomorphismus $R \rightarrow R; x_{ij} \mapsto y_{ij}$

Dies liefert eine Operation $G \times R \rightarrow R, (S, f) \mapsto f^S$

f heißt invariant unter G , wenn $f^S = f \quad \forall S \in G$

Mit $R^G = \{f \in R \mid f^S = f \quad \forall S \in G\}$ bezeichnet man den Invariantenring.

Beispiele für invariante Funktionen sind:

$$c_1 = x_{11} + x_{22} + \dots + x_{nn}$$

$$c_2 = \dots$$

$$c_n = \det(x)$$

die Koeffizienten von $\det(x - tE)$
bis auf Vorzeichen.

Satz (ohne Beweis): $R^G = C[c_1, \dots, c_n]$ d.h. ist

$\in C[c_1, \dots, c_n] \subset R = C[X_{ij}]$ der Ring der Polynomausdrücke in den Variablen $c_1, \dots, c_n$

$$\text{z.B. } c_1^2 - 2c_2 \in C[c_1, \dots, c_n]$$

Bemerkung: $R^3 \supset C[x_1, \dots, x_n]$ ist klar.

3) Die Eigen (die Untervektoren) der Abbildung

$\lambda: C^{n \times n} \rightarrow C^n$ sehen einfachste aus: Für ein Polynom λ_n ohne mehrfache Nullstellen ist das Urbild die Kongruenzklasse von $\lambda = \{SAS^{-1} \mid S \in GL(n, C)\}$
 $= \{SAS^{-1} \mid S \in GL(n, C)\}$ wobei $0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
 paarweise verschiedene Eigenwerte.

Die Spezialfälle einer $\lambda^{-1}(0) = N$ der Menge der nilpotenten Matrizen, besteht daher aus einer Vereinigung von Bahnen, eine Bahn für jede Partition.

Beispiel: $m=2$ $2=2$, $2=1+1$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11} + a_{22} = 0, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \right\} \subset C^{2 \times 2} = C^4$$

Reelles Bild: $a_{22} = -a_{11}$, $a_{12}a_{21} + a_{11}^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times R$$

$$\{N+1E\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Bahn}$$



Nullmatrix

Menge der Spur 0-Matrizen

3) Der Dualraum:

Sei V ein K -VR, dann ist $\text{Hom}(V, W)$ ebenfalls ein K -VR.
 Für $V = K^m$, $W = K^m$, $\text{Hom}(K^m, K^m) = K^{m \times m}$
 Insbesondere ist $V^* := \text{Hom}(V, K)$ ein K -VR, der Dualraum von V .
 $V = K^m$, $V^* \subseteq K^{1 \times m}$

3.1. Definition: $V^* = \text{Hom}(V, K)$ heißt Dualraum von V . Die Elemente heißen Linearformen.

Beispiele: $V = R[x]$, $\text{ev}_a: R[x] \rightarrow R$, $p \mapsto p(a)$

$\text{ev}_a \in V^*$, ebenso $\int_a^b: R[x] \rightarrow R$, $p \mapsto \int_a^b p(x) dx$

3.2. Bemerkung: Ist $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, dann induziert $f: V^* \rightarrow W^*$ eine kanonisch von f induzierte lineare Abbildung in der Dualraum:
 Dualräume von endlichdimensionalen K -VR lassen sich mit Basen gut beschreiben;

3.3 Definition: Sei V ein n -dimensionaler K -VR und

$A = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis. Dann bezeichnet

$v_i^*: V \rightarrow K$ die durch

$v_i^* = \delta_{ij}$ und lineare Fortsetzung

definierte lineare Abbildung.

Bemerkung: v_i^* hängt nicht nur von v_i , sondern von allen

Basis ab. Also $v_i^* \left(\sum_{j=1}^n v_j \delta_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} v_i^*(v_j) = \delta_{ii} = 1$

3.4 Satz: Ist $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V , dann ist $A^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ eine Basis von V^* , die duale Basis.

Insbesondere gilt: $\dim V^* = \dim V$ falls $\dim V < \infty$

Beweis: Sei $p \in V^*$ und $\lambda_i = p(v_i)$. Wir behaupten $p = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$

In der Tat: Für die Basis gilt: $p(v_i) = \lambda_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j^*(v_i)$

Dies zeigt, dass V^* von $v_1^*, \dots, v_n^*$ erzeugt wird.

Für die lineare Unabhängigkeit v_i^* :

$$0 = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* \in V^*$$

$$p(v_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j^*(v_i) = \lambda_i \quad \forall i$$

3.5 Satz: $f: V \rightarrow W$ lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen K -VR mit Basen A und B . Sei $A^* = M_B^A(f)$

Dann gibt für die duale Abbildung $f^*: W^* \rightarrow V^*$

$$M_{A^*}^{B^*}(f^*) = A^*$$

Beweis: Wir müssen das Bild von $w_i^* \in B^*$ unter f^*

bestimmen im Term der Basis $v_1^*, \dots, v_n^*$

$$f^*(w_i^*)(v_j) = w_i^*(f(v_j))$$

$$\text{Da } f(v_j) = \sum_{k=1}^m a_{kj} w_k = w_k^* \left(\sum_{k=1}^m a_{kj} w_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^m a_{kj} w_k^*(w_i) = \sum_{k=1}^m a_{kj} \delta_{ki} = a_{ij}$$

$$\Rightarrow f^*(w_i^*) : v_j \mapsto a_{ij} \Rightarrow \text{der } i\text{-te Vektor von } v_j^* \text{ in der}$$

Basisdarstellung $f^*(w_i^*)$ ist a_{ij} ,

$$f^*(w_i^*) = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^*$$

$$\Rightarrow i\text{-te Spalte von } M_{A^*}^{B^*}(f^*) \text{ ist } (a_{i1}, \dots, a_{in})$$

$$\text{Also } M_{A^*}^{B^*}(f^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n} = A^*$$

3.6. Für V ein K -VRaum, V^* den Dualraum, bezeichnet

$V^{**} = \text{Hom}(V^*, K)$ den Bidualraum. Im Gegensatz zu

V und V^* sind V und V^{**} im endlichdim. Fall

kanonisch isomorph, vermöge der Abbildung:

$i: V \rightarrow V^{**}$ $v \mapsto i(v)$, wobei
 $i(v): V^* \rightarrow K$ durch $i(v)(f) = f(v)$ definiert.

Satz: Ist $\dim V < \infty$, dann ist $i: V \rightarrow V^{**}$ ein
 kanonisch gegebener Isomorphismus.

Beweis: Wegen $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V < \infty$ reicht es zu
 zeigen, dass die lineare Abbildung i injektiv ist.
 Zu $v \in V$ mit $v \neq 0$ ist zu zeigen, dass $i(v) \in V^{**}$
 $= \text{Hom}(V^*, K)$ nicht die Nullabbildung ist. Es genügt
 also ein $f \in V^*$ zu finden mit $i(v)(f) = f(v) \neq 0$.
 Ergänzen $V = V_1$ zur Basis $v_1, \dots, v_n$ von V . Sei $v_1^*, \dots, v_n^*$
 die duale Basis, dann hat $f := v_1^*$ die gewünschte Eigenschaft.
 $i(v)(f) = f(v) = v_1^*(v) = v_1^*(v_1) = 1 \neq 0$

Bemerkungen: 1) Ist $\dim V = \infty$, dann kann man $i: V \rightarrow V^{**}$
 injektiv ebenfalls zeigen, benötigt aber stärkere mengentheoretische Hilfsmittel.

2) $V = \mathbb{R}^n$ erlaubt das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$
~~zu~~ nur vom Skalarprodukt abhängigen Isomorphismus
 von $V \rightarrow V^*$ zu definieren.

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 und $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n)^*$ ist durch $x \mapsto \langle x, - \rangle, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 gegeben. 3. S. besagt dann nur für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\text{Ach}^{n \times n}$
 $\langle W, Ay \rangle = \langle Aw, y \rangle = \langle (Aw), y \rangle = \langle Aw, y \rangle$

4) Der projektive Raum

4.1. Motivation: Der projektive Raum wurde in der Renaissance
 beim perspektivischen Zeichnen entdeckt. Fluchtlinien schneiden sich
 in $P^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup H$ wobei H für jede Klasse von
 parallelen Geraden in $\mathbb{R}^2$ einen Punkt auf dem
 Horizont enthält, mit Ausnahme der zur Horizont parallelen
 Gerade.

Dann ist klar, dass das Schnittverhalten zweier Geraden in $P^2(\mathbb{R})$
 erfüllbar ist als für Geraden in $\mathbb{R}^2$.

- Je 2 Geraden schneiden sich in einem Punkt.

Also $H = \{ \text{Klassen von parallelen Geraden in } \mathbb{R}^2 \}$

Will man, dass auch H zu je 2 Punkten $p, q \in P^2(\mathbb{R})$

gibt es genau eine Gerade durch p, q , so sehen wir, dass
 der Horizont als eine Gerade in $P^2(\mathbb{R})$ aufgefasst werden muss.

Der Schnittpunkt einer Gerade mit dem Horizont ist dann die zugehörige Klasse von ∞ 2 parallelen Geraden.

$$P^2(R) = R^2 \cup \{L \mid L \subset R^2\}$$

wobei $L = \{L \subset R^2 \text{ Gerade mit } L' \text{ parallel zu } L\}$

Äquivalenzrelation.

Kann verwendet man den projektiven Raum z.B. in der

- 1) Kryptographie, Codierungstheorie
- 2) eine Quantenzustand (Physik) ist ein Punkt in einem projektiven Raum zu einem Hilbertraum
- 3) Differentialgeometrie: Kolomingsentheorie ("Hessen")
- 4) Algebraische Geometrie: $P^n(R)$ dient als Kompaktifizierung im R^n .

Hier zunächst die formale, formale Definition:

4.2. Definition: Sei K Körper, V ein K -VR.

Dann ist die Menge

$$P(V) = \{1\text{-dim UVR } W \subset V\}$$

der projektiven Raum zu V . Spezial

$$P^n(K) = P(K^{n+1}) = \{1\text{-dim UVR von } K^{n+1}\} \\ = \{ \text{Geraden durch } 0 \in K^{n+1} \}$$

heißt n -dimensionaler projektiver Raum.

$P^n(K)$ kann man auch mit Hilfe einer Äquivalenzrelation auf $K^{n+1} \setminus \{0\}$ beschreiben.

4.3. Satz + Definition: Auf $K^{n+1} \setminus \{0\}$ ist durch $x \sim y$ genau dann, wenn $\exists \lambda \in K^* = K \setminus \{0\}$, sodass $y = \lambda x$ eine Äquivalenzrelation definiert.

Es gibt eine kanonische Bijektion $P^n(K) \cong K^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$

Für einen Vektor $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$

beschreibt $(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = [(x_0, \dots, x_n)]$ die Äquivalenzklasse von $(x_0, \dots, x_n)$.

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = \{(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \mid \lambda \in K^*\}$$

besteht aus allen Punkten auf der Geraden $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1}$ bis auf dem Nullvektor. $(x_0 : \dots : x_n)$ nennt man homogene Koordinaten der Punkte $[x] \in P^n(K)$.

Beweis: $\sim$ Äquivalenzrelation:

1) Reflexiv: $x \sim x$, $\lambda = 1$, $x = 1x$

2) Symmetrie: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ oder $y = \lambda x$,

$$\lambda \in K^* \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda} y \Rightarrow y \sim x$$

3) Transitiv: $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$$\text{oder } y = \lambda x \text{ und } z = \mu y \Rightarrow z = \mu \lambda x \Rightarrow x \sim z$$

Die Abbildung $K^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n(K) \quad x \mapsto \langle x \rangle$

ist surjektiv und $x \sim y \Leftrightarrow \langle x \rangle = \langle y \rangle$

Dies induziert die Identifikation $K^{n+1} \setminus \{0\} / \sim = P^n(K)$ $\square$

Bemerkung: Die Notation $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ will man, da für $[x] \in P^n(K)$ zwar die Koordinaten x_i von dem repräsentanten $x = (x_0, \dots, x_n) \in [x] = \langle x \rangle \setminus \{0\}$ abhängt, das Verhältnis $x_i : x_j$ für $x_j \neq 0$ aber wohldefiniert ist $x_i : x_j = \lambda x_i : \lambda x_j$.

4.4. Zusammenhang zum projektivem Zeichnen

Betrachten den Zeichnen mit

Auge im Nullpunkt im $\mathbb{R}^3$.

Jeder Punkt auf dem Boden bestimmt

eine Gerade durch Auge. Umgekehrt:

jede Gerade durch 0 außer der zum Boden

parallelen Gerade schneiden dem Boden.

Nur $P^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup P^1(\mathbb{R})$ ($P^1(\mathbb{R}) = \text{Horizont}$)



4.5. Abzählung nochmal das ganze abgezählter:

Betrachten $U_0 = \{ (x_0, \dots, x_n) \mid x_0 \neq 0 \} \subset P^n(K)$

U_0 ist wohldefiniert, denn $x_0 \neq 0$ hängt nicht von der Auswahl der repräsentanten ab. - ~~_____~~ $x_0 \neq 0 \Rightarrow x_0 \neq 0 \quad \forall \lambda \neq 0$

Die Abbildung $p_0 : U_0 \rightarrow K^n, (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$

ist wohldefinierte Bijektion mit Umkehrabbildung:

$p_0^{-1} : K^n \rightarrow U_0 \subset P^n(K)$

$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (1, z_1, \dots, z_n)$

Das Komplement von $U_0 \subset P^n(K)$ ist eine $P^{n-1}(K)$, genannt

$P(H), H = \{ x_0 = 0 \} \subset V$.

$P^n(K) \setminus U_0 = \{ (x_0, \dots, x_n) \mid x_0 = 0 \}$

$= \{ (x_1, \dots, x_n) \} = P^{n-1}(K)$

Also $P^n(K) = K^n \cup P^{n-1}(K)$ ($K^n = U_0$)

$P^n(K) = K^n \cup K^{n-1} \cup \dots \cup K^0$

$K^0 = P^0(K) = P(K^n)$

4.6. Standardbasis von $P^n(K)$ Die Koordinaten x_0 ist nicht ausgezeich-

net. Abgezählter: $U_i = \{ (x_0, \dots, x_n) \mid x_i \neq 0 \}$

$p_i : U_i \rightarrow K^n, (x_0, \dots, x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$

mit Umkehrabbildung: $p_i^{-1} : K^n \rightarrow U_i \subset P^n(K)$

$(w_1, \dots, w_n) \mapsto (w_1, w_2, \dots, w_i, 1, w_{i+1}, \dots, w_n)$

Nun nennt (U_1, P_1) eine Kante von $P^n(K)$ und die Kollisionskurve $V = \mathcal{I}(U_1, P_1)$ der Standardkurve von P^n

