

11.11. Bemerkung: Kann die Multiplikation noch schneller durchgeführt werden? Nein!

Geometrische Interpretation der Matrixmultiplikation:

$$U = V = W = \text{Hom}(K^2, K^2)$$

Matrixmultiplikation

ist eine bilineare Abbildung $U \times V \rightarrow W$

äquivalent bilinear Abbildung $U \otimes V \rightarrow W$

äquivalent linearform: $U^* \otimes V^* \otimes W \rightarrow K$

äquivalent Element $t \in U \otimes V \otimes W^*$

Für $m=2$ fragen wir also, ob t ein Tensor vom

Rang < 7 ist. Antwort: Nein. $\text{Rang}(t) = 7$ (Strossen 69)

Unbekannt: Asymptotisch optimales Ergebnis?

$$m=3$$

$$19 \leq \text{Rang}(t) \leq 23 \quad (\text{Laderman 76})$$

$$m=4$$

$$\text{Rang}(t) \leq 49 = 7^2 = 4 \log_2 7$$

12) Zornsches Lemma und Anwendungen

Das Auswahlpostulat der Mengenlehre besagt folgendes:

12.1. Auswahlaxiom: Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen und $M = \bigcup_{i \in I} M_i$. Die Mengen seien nicht leer. Dann existiert eine Auswahlfunktion $f: I \rightarrow M$ mit $f(i) \in M_i \quad \forall i \in I$.

Die Menge der Auswahlfunktionen bezeichnen wir mit $\prod_{i \in I} M_i$. Mit anderen Worten: Unendliche Kartesische Produkte von nichtleeren Mengen sind nichtleer.

Das Auswahlaxiom erlaubt Existenzbeweise, für die konstruktive Beweise nicht bekannt sind.

Am häufigsten wird das Auswahlaxiom in seiner Folgerung im Zornschen Lemma verwendet. Wir formulieren zunächst das Lemma.

12.2. Definition: Sei M eine Menge; Eine Ordnungsrelation „ $\leq$ “ auf M ist eine Relation, die

$$(i) \quad x \leq x \quad \forall x \in M$$

$$(ii) \quad x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$$

$$(iii) \quad x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

Man nennt M zusammen mit dieser Relation eine geordnete Menge.

Wir verlangen nicht, dass je 2 Elemente von M vergleichbar sind, also $x \leq y$ oder $y \leq x \quad \forall x, y \in M$ muss nicht gelten.

Beispiele: 1) $M =$ Bewohner eines Hochhauses

$$x \leq y \text{ falls Stockwerk}(x) \leq \text{Stockwerk}(y)$$

Dies ist keine Ordnungsrelation, da (ii) nicht erfüllt ist.

2) $(\mathbb{R}, \leq)$ ist eine vollständig geordnete Menge.

3) $(\mathbb{Z}^n, \leq)$ mit $(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n)$

$$\text{falls } a_i \leq b_i \quad (\forall i=1, \dots, n)$$

ist eine partiell geordnete Menge.

12.3. Definition: Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge.

1) Eine Teilmenge $K \subset M$ heißt Kette, wenn $x \leq y$ oder $y \leq x \quad \forall x, y \in K$ gilt. Also $(K, \leq)$ ist vollständig geordnet.

2) Eine obere Schranke einer Kette $K \subset M$ ist ein Element $y \in M$ sodass $x \leq y \quad \forall x \in K$ gilt.

Eine obere Grenze ist eine kleinste obere Schranke, d.h. y ist eine Schranke und $y \leq z$ für alle deren Schranken von K .

Im Allgemeinen brauchen Ketten weder obere Schranken noch obere Grenzen besitzen.

Beispiel: 1) $(\mathbb{R}, \leq)$ Jede Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ ist eine Kette. K hat eine obere Schranke, wenn es nach oben beschränkt ist, in diesem Falle ist $y = \sup K$ eine obere Grenze.

2) In $(\mathbb{Q}, \leq)$ hat nicht jede nach oben beschränkte Kette eine obere Grenze.

12.4. Definition: Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Ein maximales Element $m \in M$ ist ein Element $m \in M$, für das $m \leq x \Rightarrow m = x \quad \forall x \in M$ gilt.
Analog: minimales Element

12.5. Satz (Zornsches Lemma)

Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete nichtleere Menge. Hat jede Kette $K \subset M$ eine obere Schranke, dann hat M ein maximales Element.

Vor dem Beweis einige Anwendungen in der linearen Algebra.

12.6. Satz: Jeder Vektorraum V hat eine Basis

12.7. Definition: Sei $\{v_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus V .

$\{v_i\}_{i \in I}$ heißt linear unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge $\{i_1, \dots, i_k\} \subset I$ von paarweise verschiedenen Indizes $\lambda_{i_1} v_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} v_{i_k} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

Also $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ sind linear unabhängig.

$\{v_i\}_{i \in I}$ heißt ein Erzeugendensystem von V , wenn $\forall v \in V$ eine endliche Teilmenge $\{i_1, \dots, i_k\} \subset I$ existiert und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ sodass

$$v = \lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_k v_{i_k} \in \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \rangle$$

$\{v_i\}_{i \in I}$ ist eine Basis von V , wenn es ein Erzeugendensystem aus linear unabhängigen Vektoren ist.

Beweis von Satz 12.6. Wir betrachten die Menge

$M = \{A \mid A \subset V \text{ ist eine Familie von lin. unabh. Vektoren}\}$
und die Ordnungsrelation $A \leq B$ falls $A \subset B$.

$M \neq \emptyset$, da $\emptyset \in M$. Sei $K \subset M$ eine maximale Kette.

Die Kette K hat eine obere Schranke, da $M \neq \emptyset$

Betrachten $B = \bigcup_{A \in K} A$ und zeigen: B ist eine Schranke, also $B \in M$ ist zu zeigen.

Es seien $v_1, \dots, v_n$ paarweise verschiedene Elemente von B .

Dann existieren $A_i \in K$ mit $v_i \in A_i$. Da K eine Kette ist, dürfen wir nach Umnummerieren

$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$, also $v_1, \dots, v_n \in A_n$ und

daher linear unabhängig. $B \in M$ ist also eine Schranke.

Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element

$B \in M$. Wir zeigen: B erzeugt V .

Sei $w \in V$ beliebig, $w \notin B$. Dann ist $B \cup \{w\} \neq B$.

Da $B \in M$ maximal ist, folgt $B \cup \{w\} \notin M$.

Also es existieren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in K$ und $v_1, \dots, v_k \in B$

sodass $\lambda w + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ mit nicht alle

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k = 0$, $\lambda \neq 0$, da $v_1, \dots, v_k \in B$ linear unabhängig sind.

$$\Rightarrow$$

$$w = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda}\right) v_k \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

(Körperabschließ)

Also heißt das maximale Element $B \in M$ und ist eine Basis. $\square$

12.8. Corollar (Basisergänzungssatz)

Sei $A \subseteq V$ eine Familie von linear unabhängigen Vektoren, dann lässt sich A zu einer Basis B mit $A \subseteq B$ ergänzen.

Beweis: Wir betrachten $M = \{N \mid A \subseteq N \subseteq V \text{ ist eine Familie von linear unabhängigen Vektoren}\}$ und argumentieren wie gehabt. $\square$

Der Beweis des Zornschen Lemmas beruht auf dem mehreren Schritten.

12.9. Fundamentallemma: Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge, in der jede Kette eine obere Grenze hat. Sei $f: M \rightarrow M$ eine Abbildung mit $x \leq f(x) \quad \forall x \in M$. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. $\exists z \in M$ mit $f(z) = z$.

Wir zeigen zunächst, dass das Fundamentallemma zusammen mit dem Auswahlaxiom das Zornsche Lemma impliziert.

12.10. Folgerung: Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge, in der jede Kette eine obere Grenze hat. Dann gibt es ein maximales Element in M .

(12.11.) Beweis: M ist nicht leer, da die leere Kette eine obere Grenze hat. Dies ist das eindeutig bestimmte minimale Element von M . Wir nehmen an, dass es kein maximales Element in M gibt. Zu jedem $x \in M$ ist dann die Menge $M_x = \{y \in M \mid x < y\} \neq \emptyset$. Sei $f: M \rightarrow M$ eine Auswahlfunktion, $f(x) \in M_x$. Dann gilt $x < f(x)$. Nach dem Fundamentallemma hat f einen Fixpunkt $z = f(z)$ ist ein Widerspruch zu $f(z) \in M_z$ bzw. $z < f(z)$. $\square$

Die Voraussetzung der Folgerung wird stärker als die im Zornschen Lemma.

12.12. Satz (Hausdorff) Sei M eine geordnete Menge, dann gibt es eine maximal große Kette in M .

Beweis: Die Menge der Ketten ist bezüglich Inklusion partiell geordnet. Für jede Kette K von Ketten ist

$$\bigcup_{K \in K} K$$

selbst eine Kette

und daher eine obere Grenze von K .

In der Tat $x, y \in \bigcup_{K \in K} K \implies \exists x \in K_1, y \in K_2, K_1, K_2 \in K$
und deshalb gilt: $K_1 \subset K_2$ oder $K_2 \subset K_1$

Also $x, y \in K_2$ oder $x, y \in K_1$

In beiden Fällen folgt, dass x, y vergleichbar sind.

$x \leq y$ oder $y \leq x$. Dies zeigt

$$\bigcup_{K \in K} K$$

ist eine Kette. Nach der Folgerung
gibt es eine maximal große Kette.

Beweis des Zornschen Lemmas:

Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge in der jede Kette eine obere Schranke hat. Sei $K \subset M$ eine maximale Kette und $z \in M$ eine obere Schranke.

Für $y \in M$ mit $z \leq y$ ist dann $K \cup \{y\}$ ebenfalls eine Kette, da für $x \in K$

$x \leq z \leq y$ also $x \leq y$ erfüllt ist.

Da K maximal ist, muss y ein Element von K sein.

Also $y \leq z \leq y$ und deshalb $y = z$, z ist also ein maximales Element. $\square$

Es bleibt das Fundamentallemma zu beweisen.