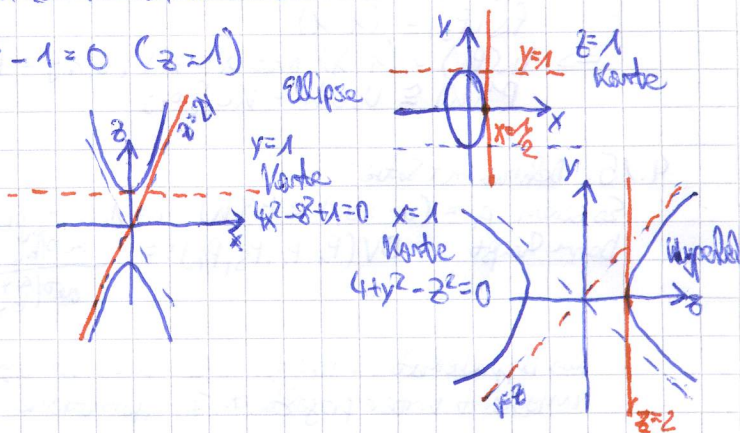
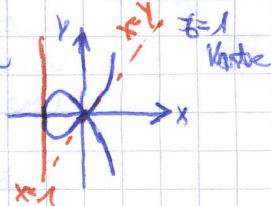
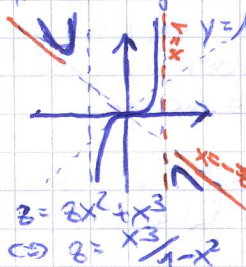
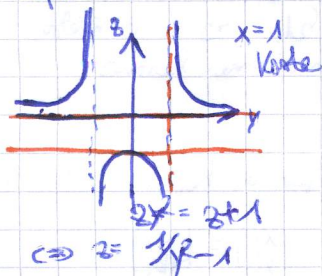


Beispiel: $n=2$: $\{f(x_0, x_1, x_2) \in K[x_0, x_1, x_2] \text{ homogen}\}$
 Um $V(f)$ zu verstehen, betrachten wir die Durchschnitte
 $P_0 \cap U_0, \dots, P_0 \cap U_2$
 $= \{f(x_1, x_2) \mid f(1, x_1, x_2) = 0\}$ usw.

Beispiel: $4x^2 + y^2 - 1 = 0$ ($z=1$)



Beispiel: $y^2 = x^2 + x^3 \in \mathbb{R}[x, y]$ homogen $zy^2 = zx^2 + x^3$



Allgemein: $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ Polynome vom Grad d
 $f(x_0, \dots, x_n) = x_0^d f(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$
 $f, g \in K[x_0, \dots, x_n]$ homogen
 $x_i = 1$ einsetzen.

4.14. Definition: Es seien $V_1, V_2 \subset \mathbb{P}^n(K)$ zwei Teilmengen.
 V_1, V_2 heißen projektiv äquivalent, wenn ein
 $P_A \in \text{PGL}(n+1, K)$ existiert mit $P_A(V_1) = V_2$

Beispiel: 1) Gegeben verschiedene Punkte $V_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$
 $V_2 = \{q_0, q_1, q_2\} \subset \mathbb{P}^1(K)$ sind projektiv äquivalent.

Beweis: In der Tat nach Satz 4.9. $\exists! P_A \in \text{PGL}(2, K)$
 sodass $P_A(p_i) = q_i$ für $i=0, 1, 2$

Wie sieht diese Frage für 4 Punkte $P_1, \dots, P_4 \in P^1(K)$ aus?
 Es seien $P_1, \dots, P_4 \in P^1(K)$ vier verschiedene Punkte.

Dann existiert ein $P_A \in \text{PGL}(2, K)$, sodass

$$P_A(P_1) = (1:0), \quad P_A(P_2) = (0:1)$$

$$P_A(P_3) = (1:1)$$

$$\Rightarrow P_A(P_4) = (1:\lambda) \text{ mit } \lambda \in K \setminus \{0, 1\} = P^1(K) \setminus \{0, 1, \infty\}$$

$$P^1(K) \cong U \cup H = K \cup \{\infty\}$$

4.15. Definition + Satz:

Es seien $p_i = (a_i : b_i) \in P^1(K)$ $i = 1, \dots, 4$ paarweise verschieden.

Dann heißt $DV(P_1, P_2, P_3, P_4) := \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}}$

das Doppelverhältnis von $P_1, \dots, P_4$. Dies ist wohldefiniert und invariant unter projektiven Transformationen.

Beweis: 1) Ersetzen wir den Repräsentanten $(a_i : b_i)$ von $(a_i : b_i)$ durch $(\lambda a_i : \lambda b_i)$ für ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ dann sieht sich der Zähler λ aus zwei Determinanten heraus und kürzt sich weg.

2) Ist $P_A \in \text{PGL}(2, K)$ dann gilt für die Repräsentanten von $(x_i : y_i) = P_A(a_i : b_i)$

Also:

$$\begin{aligned} DV(x_1 : y_1, \dots, x_4 : y_4) &= \frac{\det \begin{pmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_4 & a_1 \\ b_4 & b_1 \end{pmatrix}} \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{\det A \det \begin{pmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{pmatrix}}{\det A \det \begin{pmatrix} a_4 & a_1 \\ b_4 & b_1 \end{pmatrix}} \cdot \frac{\det A \det \begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{pmatrix}}{\det A \det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_4 & a_1 \\ b_4 & b_1 \end{pmatrix}} \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

nach dem Determinantenproduktgesetz

$$= \frac{\det \begin{pmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_4 & a_1 \\ b_4 & b_1 \end{pmatrix}} \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}} = DV(P_1, \dots, P_4)$$

Bemerkung: Für vier Punkte $P_1 = (1:z_1), \dots, P_4 = (1:z_4) \in U \subset P^1(K)$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$DV(P_1, \dots, P_4) = \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

In der Tat: Determinanten analog zu Beweis - Teil 2)

4.16. Satz: Es Seien $P_1, \dots, P_4$ und $q_1, \dots, q_4 \in P^1(K)$ zwei Mal vier verschiedene Punkte. Es existiert ein $P_\lambda \in \text{PGL}(2, K)$ mit $P_\lambda(P_i) = q_i$ für $i=1, \dots, 4$ genau dann, wenn das Doppelverhältnis übereinstimmt.
 $\text{DV}(P_1, \dots, P_4) = \text{DV}(q_1, \dots, q_4)$

Beweis: Die Notwendigkeit ist klar wegen der Invarianz des DV unter projektivem Automorphismen.

Hinreichend: Wir betrachten $P_\lambda \in \text{PGL}(2, K)$ mit

$$P_\lambda(P_1) = (0:1), P_\lambda(P_2) = (1:0) \\ P_\lambda(P_3) = (1:1), P_\lambda(P_4) = (1:\lambda) \quad \lambda \in K \setminus \{0, 1\}$$

$$\text{DV}(P_1, \dots, P_4) = \text{DV}((1:0), (0:1), (1:1), (1:\lambda)) \\ = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} : \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-1}{1} : \frac{-1}{1} = \lambda$$

Das $\text{DV}(P_1, \dots, P_4)$ bestimmt also das Bild von P_4 unter P_λ .
 Genauso existiert $P_\mu \in \text{PGL}(2, K)$ mit

$$P_\mu(q_1) = (0:1), P_\mu(q_2) = (1:0) \\ P_\mu(q_3) = (1:1), P_\mu(q_4) = (1:\text{DV}(q_1, \dots, q_4)) = (1:\lambda)$$

nach Voraussetzung:

Also P_λ mit $A = C^{-1}B$ erfüllt

$$P_\lambda(P_i) = P_\mu^{-1} \circ P_\mu(P_i) = q_i \quad i=1, \dots, 4 \quad \square$$

Der Satz 4.16 beantwortet die Frage ob die Mengen

$V_1 = \{P_1, \dots, P_4\}$ und $V_2 = \{q_1, \dots, q_4\}$ projektiv äquivalent sind oder nicht. Wir können die Punkte permutieren. Die Permutationsgruppe S_4 operiert auf dem DV durch Permutation der Argumente.

Dabei operiert die Klein'sche Vierergruppe

$$V_4 \in \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \text{ trivial:}$$

$$\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

$$\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_3}$$

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

Für die anderen Nebenklassen von $V_6 \subset S_4$ ergibt sich:

$$P_1 = (0:1), P_2 = (1:0), P_3 = (1:1), P_4 = (1:\lambda)$$

$$DV(P_2 P_1 P_3 P_4) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} : \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{-1} : \frac{1}{-1} = \frac{1}{\lambda}$$

$$DV(P_1 P_3 P_2 P_4) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} : \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \frac{1-\lambda}{1} : \frac{1}{1} = 1-\lambda$$

$$DV(P_2 P_3 P_1 P_4) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} : \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \frac{1-\lambda}{-1} : \frac{1}{1} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

$$DV(P_3 P_1 P_2 P_4) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} : \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{1-\lambda} : \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}$$

$$DV(P_3 P_2 P_1 P_4) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} : \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{-1}{1-\lambda} : \frac{-1}{-1} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

Es folgt: $S_4/V_6 \cong S_3$ operiert auf $K \setminus \{0, 1\} = P^1(K) \setminus \{0, 1\}$
mit Bahnen $\{1, \lambda, 1-\lambda, \frac{1-\lambda}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\}$

Für allgemeine λ sind diese sechs Werte paarweise verschieden.

Für spezielle λ sind die Bahnen kleiner, z.B.

(i) $\lambda = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda^2 = 1, \lambda \neq 1 \Rightarrow \lambda = -1$

$\lambda = -1$ hat die Bahn $\{-1, 2, \frac{1}{2}\}$

(ii) $\lambda = 1-\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ mit gleicher Bahn

(iii) $\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

und die Bahn besteht nur aus $\{\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$

(iv) $\lambda = \frac{1}{1-\lambda} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ hat die Bahn aus zwei Elementen (siehe iii)

(v) $\lambda = \frac{\lambda}{\lambda-1} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = \lambda \Rightarrow \lambda(\lambda-2) \Rightarrow \lambda=2$
hat eine dreielementige Bahn.

Also: es gibt nur zwei spezielle Bahnen

$\{-1, 2, \frac{1}{2}\}, \{\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$ alle anderen
haben sechs Elemente.

4.17. Definition: Es sei $2 \neq 0 \in K$. Die j -Invariante der Punkte $P_1, \dots, P_4 \in P^1(K)$ mit $\Delta(P_1, \dots, P_4) = 1$ definieren wir durch

$$j(\lambda) = \frac{(x^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2} \cdot 28$$

4.18. Satz: $2 \neq 0 \in K$.

- 1) Die j -Invariante $j(\Delta(P_1, \dots, P_4))$ hängt nicht von der Reihenfolge der Punkte ab.
- 2) Zwei Mengen $\{P_1, \dots, P_4\} = V_1$ und $V_2 = \{Q_1, \dots, Q_4\} \in P^1(K)$ aus jeweils vier Punkten sind projektiv äquivalent genau dann, wenn sie die gleiche j -Invariante haben.

Beweis: 1) Substituieren wir $\frac{1}{x}$ für λ in $j(\lambda)$

$$j\left(\frac{1}{x}\right) = 28 \frac{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1\right)^3}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = 28 \frac{(1 - x + x^2)^3}{x^6 \frac{1}{x^2} \frac{1}{x^2} (x-1)^2}$$

$$= 28 \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(1-x)^2} = j(x) \quad \text{gerauso:}$$

$$j(1-x) = 28 \frac{(1-x)^2 - (1-x) + 1)^3}{(1-x)^2 (x - (1-x))^2} = \frac{28(x^2 - x + 1)^3}{(1-x)^2 x^2} = j(x)$$

Da die Permutationen (12), (23), die Gruppe S_3 erzeugen, folgt auch $j\left(\frac{1}{1-x}\right) = j(x)$, $j\left(\frac{1}{1+x}\right) = j(x)$ sowie $j\left(\frac{1-x}{x}\right) = j(x)$.
 j ist also konstant auf dem Bahnraum.

Für ein festes λ hat die Gleichung $28 \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(1-z)^2} = j(\lambda)$

$\Leftrightarrow 28(z^2 - z + 1)^3 - j(\lambda) z^2(1-z)^2 = 0$ maximal sechs Lösungen, da es sich um ein Polynom 6ten Grades handelt. Diese sind dann also $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, 1-x_1, \frac{1}{1-x_1}, \frac{1}{1-x_2}$

Für spezielle Werte $\lambda \in \left\{ \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2} \right\}$ oder $\lambda \in \left\{ -1, 2, \frac{1}{2} \right\}$ haben wir a) $j(\lambda) = 0$ (2.8.1) und

$$j(z) = 28 \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(1-z)^2} = 0 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z \in \left\{ \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Für $\lambda \in \left\{ -1, 2, \frac{1}{2} \right\}$ gilt $j(\lambda) = 28 \frac{(1+1+1)^3}{1^2(2)^2} = 2^6 \cdot 3^3 = 1728$

Da $28(z^2 - z + 1)^3 - 1728 z^2(1-z)^2 = 2^8(z+1)^2(z-2)^2(z-\frac{1}{2})^2$ hat auch für diesen $j = 1728$ die gleiche Lösung für die Bahn.

$$\text{Also } f(DV(p_1, \dots, p_k)) = f(DV(q_1, \dots, q_k))$$

$$\Rightarrow \exists \varphi \in \mathcal{G} \quad DV(p_1, \dots, p_k) = DV(\varphi(p_1), \dots, \varphi(p_k))$$

$$\Rightarrow \exists \varphi_A \in \text{PGL}(2, k) \text{ with } \varphi_A(p_i) = q_i$$

$$\Rightarrow \varphi_A(k_1) = \varphi_A(k_2)$$