

Bleibt die lineare Unabhängigkeit dieser Elemente zu zeigen.

Für jede k -elementige Teilmenge $I \subset \{1, \dots, m\}$
 $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$ betrachten wir die Projektion
 $V \rightarrow W_I = \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle \cong K^k$
 $e_j \mapsto \begin{cases} e_{i_j}, & j \in I \\ 0, & j \notin I \end{cases}$ und

$$\begin{array}{ccc} x_1 \dots x_k & \xrightarrow{\quad} & K^k V \\ \downarrow p_i: x \mapsto x_{i_j} & \searrow & \\ W_{i_1} \times \dots \times W_{i_k} & \xrightarrow{\text{det}} & K \\ \cong K^{k_1} \times \dots \times K^{k_k} & & \end{array}$$

Für Vektoren $a_1, \dots, a_k \in K^m$
 $p_i(a_1), \dots, p_i(a_k) \in W_i \cong K^k$

Stellen wir die $a_1, \dots, a_k$ für
 unsere Basis dar:

$a_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i$, $A = (a_{ij}) \in K^{m \times k}$, deren Spalten
 den Vektoren entsprechen, dann entspricht $p_i(a_1), \dots, p_i(a_k)$
 der Untermatrix $A_i = (a_{ij})$ $m=1, \dots, k$, $j=1, \dots, k$
 und die Komposition entspricht der Abbildung $A \mapsto \det A_i$
 Unter dieser Abbildung wird ein Tupel $e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \in K \times \dots \times V$
 $J = \{j_1 < \dots < j_k\}$ auf Null abgebildet, außer $J=I$.
 $A(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \rightarrow \det(A_i) = \begin{cases} 0, & j \neq 1 \\ 1, & j=1 \end{cases}$

Nur
 $K^k V \rightarrow K$ erfüllt
 $e_{j_1}, \dots, e_{j_k} \mapsto \begin{cases} 0, & j \neq 1 \\ 1, & j=1 \end{cases}$

$e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$

$\Rightarrow e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$ ist von den
 anderen linear unabhängig.

$\Rightarrow$ Die Elemente

$e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ mit $I = \{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$
 bilden eine Basis von $K^k V$
 insbesondere: $\dim K^k V = \binom{m}{k}$.

8.8. Corollar: Sei V endlichdimensionaler K -VR.

Dann ist $\dim V = \max \{k \mid K^k V \neq 0\}$

Beweis: $m = \dim V$, $\max \{k \mid \binom{m}{k} \neq 0\} = m$ $\square$

8.9. Satz: Sei $V = K^m$ ein K -VR mit Basis $e_1, \dots, e_m$ und

$v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i$ für $j=1, \dots, k$ eine Familie von
 Vektoren, $A = (a_{ij}) \in K^{m \times k}$ die Matrix der Koeffizienten,
 dann gilt: $v_1, \dots, v_k = \sum_{i=1}^m e_i \cdot \det A_i$ $e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \in K^k V$

wobei $A_i = (a_{ij})$
 $i=1, \dots, k$
 $j=1, \dots, k$

die $k \times k$ -Untermatrix
 zu den Zeilen $i_1, \dots, i_k$
 bezeichnet.

Beweis: Wie im Satz 8.7. Betrachten wir die Projektoren

$$P_i: V \rightarrow W_i = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$$

$e_j \mapsto \begin{cases} e_j & \text{für } j \in I \\ 0 & \text{für } j \notin I \end{cases}$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (N P_I)(v_1, \dots, v_k) &= P_I(v_1) \wedge \dots \wedge P_I(v_k) \\ &= \left(\sum_{j=1}^k a_{ij1} e_{ij1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^k a_{ijk} e_{ijk} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^k \dots \sum_{i_k=1}^k a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_k k} e_{i_1 1} \wedge \dots \wedge e_{i_k k} \\ &= \sum_{i \in S_k} \operatorname{sgn}(i) a_{i11} \dots a_{i_k k} e_{i11} \wedge \dots \wedge e_{i_k k} \\ &= \det A_i e_{i11} \wedge \dots \wedge e_{i_k k} \quad \text{nach der Formel für det} \end{aligned}$$

wegen der Multiplikativität wird abnehmend.

Dies gilt für alle $I \in \binom{\{1, \dots, n\}}{k}$ mit $|I| = k$.

8.10. Satz: Sei V ein K -VR der Dimension n .

$v_1, \dots, v_k$ Vektoren. Dann gilt: Es sind äquivalent:

- (i) $v_1, \dots, v_k \neq 0 \in K^k V$
- (ii) $v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig.

Beweis: Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V , $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$
 Basisdarstellungen mit $A = (a_{ij}) \in K^{n \times k}$ die
 Koeffizientenmatrix. Dann gilt: $v_1, \dots, v_k$ linear
 unabhängig.

$$(\Leftrightarrow) \operatorname{rang} A = k \Leftrightarrow \text{eine der } k \times k\text{-Minoren } \det A_i \neq 0$$

$$\Leftrightarrow v_1, \dots, v_k \neq 0 \text{ nach Satz 8.9.}$$

8.11. Definition: Sei V ein K -Modul, dann bezeichnet

$$N^0 V = \bigoplus_{i=0}^{\infty} N^i V, \quad \text{wobei } N^0 V = K, \quad N^1 V = V$$

die direkte Summe der äußeren Potenzen von V .

Ist V ein n -dimensionaler K -Vektorraum mit Basis
 $e_1, \dots, e_n$, dann ist $NV = K \oplus V \oplus N^2 V \oplus \dots \oplus N^n V$
 ein K -VR der Dimension 2^n mit Basis
 $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ für jede Teilmenge $I \in \binom{\{1, \dots, n\}}{k}$
 $i \in \{1, \dots, n\}$

Insbesondere $e_\emptyset = 1 \in K = N^0 V$

8.12. Im Folgenden wollen wir N^V die Struktur einer K -Algebra geben. In Termen der Basis ist dies ganz einfach:
 R Ring, A R -Modul zusammen mit Multiplikation
 $A \times A \rightarrow A$ die distributiv mit Addition ist und mit R -Modul verträglich ist, d.h. $(ra)a_2 = r(a_1a_2) = ar_1a_2$
 heißt R -Algebra. $(a_1a_2)a_3 = a_1(a_2a_3)$
 1-Isomorphismus: $R \rightarrow A, r \mapsto r \cdot 1_A$

Endlich-Algebra

Beispiel: Jeder Ring ist eine $\mathbb{Z}$ -Algebra. Speziell $A = K$
 Körper, $\mathbb{Z} \rightarrow K, m \mapsto m \cdot 1_K$
 Zwei Fälle: $\mathbb{Z} \rightarrow K$ oder $\mathbb{Z} \nrightarrow K$

$\Downarrow$
 $\mathbb{Q} \hookrightarrow K, m \mapsto \frac{m \cdot 1_K}{m \cdot 1_K} \Rightarrow$ Bildring hat keine Nullteiler.
 $\Rightarrow \ker(\mathbb{Z} \rightarrow K) = p\mathbb{Z}$
 mit p Primzahl
 $\Rightarrow \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset K$
 Man sagt: oder $K = 0$
 oder $K = p > 0$

$e_i = e_{i1} \dots e_{in}$ $e_j = e_{j1} \dots e_{jn}$
 $e_i e_j = e_{i1} \dots e_{in} e_{j1} \dots e_{jn}$
 Man merkt deshalb „ n “ auch das Produkt.
 Also $e_i e_j = 0$ falls $I \cap J \neq \emptyset$
 genauer:
 $e_i e_j = \begin{cases} \pm e_{i+j} & I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Lineare Erzeugnis definiert für n -dimensionale K -VR
 ein Produkt aus N^V . Nicht so klar ist, dass diese Konstruktion
 unabhängig von Basiswahlen ist.

Man kann die Algebra-Struktur auf N^V auch ohne Bezug auf
 Basen aufbauen. Diese Konstruktion geht für beliebige
 K -Moduln V .

8.13. Satz: Sei V ein K -Modul. Dann gibt es genau eine
 bilineare Abbildung

$\mu: N^2 V \times N^2 V \rightarrow N^{2+2} V$, die
 $(x_1 \wedge \dots \wedge x_r, y_1 \wedge \dots \wedge y_s) \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s$
 abbildet $\forall x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s \in V$.

Beweis: Wir betrachten die Abbildung
 $N^{2+2} = \frac{V \times \dots \times V}{2} \times \frac{V \times \dots \times V}{2} \rightarrow N^{2+2} V$

Für eine festes Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in V \times \dots \times V$ ist die Abbildung

$$V \times \dots \times V \xrightarrow{e} N^{2n} V, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_n$$

 bilinear und alternierend, faktoriisiert also über
 $N^n V$.

$$V \times \dots \times V \begin{matrix} \nearrow N^n V \\ \searrow N^{2n} V \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \varphi_{x_1, \dots, x_n} \\ N^{2n} V \end{matrix}$$

Dies definiert nun eine Abbildung

$$V \times \dots \times V \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}(N^n V, N^{2n} V)$$

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi_{x_1, \dots, x_n}$

Auch diese Abbildung ist multilinear und alternierend.

Dies gibt was: Faktoriisiert über alle $N^n V$.

$$\Rightarrow \varphi: N^n V \rightarrow \text{Hom}(N^n V, N^{2n} V)$$

Wir definieren μ vermöge φ durch:

$$\mu(t, s) = \varphi(t)(s) \quad \mu \text{ erfüllt}$$

$$\mu(x_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_n) = x_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_n$$

und ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir ein Produkt:

8.14. $NV \times NV \rightarrow NV$ das 1-Produkt.

$$\begin{matrix} \cup & \cup & \cup \\ N^n V \times N^n V & \rightarrow & N^{2n} V \end{matrix}$$

8.15. Eigenschaften des Doppelproduktes:

(i) Das 1-Produkt ist assoziativ. $((t_1 \wedge t_2) \wedge t_3) = t_1 \wedge (t_2 \wedge t_3)$

(ii) $1 \otimes K = NV$ ist ein Einselement.

(iii) $\wedge$ ist distributiv über der Addition in NV

(iv) Das 1-Produkt ist nicht kommutativ, aber für $t \in N^n V$ und $s \in N^m V$ gilt

$$t \wedge s = (-1)^{nm} s \wedge t$$

Man spricht von strikt oder graduert kommutativ.

Beweis: (iii) ist klar nach Definition. (ii) auch.

Zu (i): Es genügt (wollte ich beweisen ist) die Aussage für

$$t_1 = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$$

$$t_2 = y_1 \wedge \dots \wedge y_m \quad t_3 = z_1 \wedge \dots \wedge z_m$$

$$\begin{aligned} t_1 \wedge (t_2 \wedge t_3) &= (x_1 \wedge \dots \wedge x_n) \wedge (y_1 \wedge \dots \wedge y_m) \wedge (z_1 \wedge \dots \wedge z_m) \\ &= (x_1 \wedge \dots \wedge x_n) \wedge (y_1 \wedge \dots \wedge y_m \wedge z_1 \wedge \dots \wedge z_m) \\ &= (x_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_m \wedge z_1 \wedge \dots \wedge z_m) \\ &= \dots = (t_1 \wedge t_2) \wedge t_3 \end{aligned}$$

(iv) Es genügt ebenfalls für Elemente $t = x_1 \wedge \dots \wedge x_r \in \wedge^r V$ und $s = y_1 \wedge \dots \wedge y_r \in \wedge^r V$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 t \wedge s &= x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_r \\
 &= (-1)^{r-1} x_1 \wedge \dots \wedge x_{r-1} \wedge y_1 \wedge x_r \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_r \\
 &= (-1)^{r-1} x_1 \wedge \dots \wedge x_{r-1} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_r \wedge x_r \\
 &= (-1)^{r-1} x_1 \wedge \dots \wedge y_r \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_r \\
 &= (-1)^{r(r-1)/2} s \wedge t = 0
 \end{aligned}$$

Einige Anwendungen der äußeren Algebra:

8.16. Konzeptuelle Definition der Determinante:

Sei V eine n -dimensionale K -VR und $f \in \text{End}(V)$, dann ist

$$\wedge^n f \in \text{Hom}(\wedge^n V, \wedge^n V) \cong \text{End}(\wedge^n V)$$

Da $\wedge^n f$ eindimensional ist, ist $K \cong \text{End}(\wedge^n V)$ via $t \mapsto t \wedge f$.

Die Determinante $\det(f)$ ist ~~das Bild~~ das Bild des linearen Isomorphismus vom $\wedge^n f$:

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xleftarrow{\cong} & \text{End}(\wedge^n V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \det f & \xleftarrow{\quad} & \wedge^n f
 \end{array} \quad \square$$

8.17. Die konzeptuelle Interpretation der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms:

V n -dimensionale K -VR, $f \in \text{End}(V)$, $A = M_B^B(f)$

$$\begin{aligned}
 \chi_f(t) &= \chi_A(t) = \det(A - tE) \in K[t] \\
 &= \det A + c_{n-1}(-t) + \dots + c_1(-t)^{n-1} + (-t)^n
 \end{aligned}$$

Also: $c_n = \det A = \det f$

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \text{tr } A = a_{11} + \dots + a_{nn} \\
 &= \text{tr } f
 \end{aligned}$$

Satz: Mit Notation wie oben gilt:

$$c_k = \text{tr}(\wedge^k f)$$