Beweis: Die Menge der Ketten ist bezüglich Inklusion partiell geordnet. Für jede Kette $\mathcal{K}$ von Ketten ist

$$\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$$

selbst eine Kette und daher eine obere Grenze von $\mathcal{K}$.

In der Tat $x, y \in \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ $\exists\, x \in K_1, y \in K_2$, $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ und deshalb gilt: $K_1 \subset K_2$ oder $K_2 \subset K_1$

Also $x, y \in K_2$ oder $x, y \in K_1$

In beiden Fällen folgt, dass x, y vergleichbar sind. $x \leq y$ oder $y \leq x$. Dies zeigt

$\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ ist eine Kette. Nach der Folgerung gibt es eine maximal große Kette.

Beweis des Zornschen Lemmas:

Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge in der jede Kette eine obere Schranke hat. Sei $K \subset M$ eine maximale Kette und $z \in M$ eine obere Schranke.

Für $y \in M$ mit $z \leq y$ ist dann $K \cup \{y\}$ ebenfalls eine Kette, da für $x \in K$

$x \leq z \leq y$ also $x \leq y$ erfüllt ist.

Da K maximal ist muss y ein Element von K sein, Also $y \leq z \leq y$ und deshalb $y = z$, z ist also ein maximales Element. $\square$

Es bleibt das Fundamentallemma zu beweisen.

Bemerkung: Da die leere Menge eine Kette ist, ist M nicht leer. Die obere Grenze der leeren Kette ist das eindeutig bestimmte minimale Element von M.

Beweis: Im Laufe des Beweises werden wir Notation einführen, die im Beweis interessant ist.

Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt zulässig, wenn mit jeder Kette $K \subset N$ auch die obere ~~Schranke~~ Grenze in N liegt und $f(N) \subset N$.

Der Durchschnitt von zulässigen Mengen ist nicht leer, da alle zulässigen Mengen das minimale Element enthalten und ebenfalls zulässig. Wir können also M durch den Durchschnitt aller zulässigen Teilmengen ersetzen und f durch die Einschränkung.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass M keine von M verschiedenen zulässigen Teilmengen enthält.
Ein Punkt $x \in M$ heißt Trennpunkt, wenn für $y \in M$ mit $y < x$ auch $f(y) \le x$ gilt.

Hilfssatz 1: Mit den Voraussetzungen wie bisher gilt:
Sei $x \in M$ ein Trennpunkt, dann gilt: $y \le x$ oder $f(x) \le y$ $\forall y \in M$. Insbesondere sind Trennpunkte mit jedem Punkt $y \in M$ vergleichbar.

Hilfssatz 2: Jeder Punkt $x \in M$ ist Trennpunkt. Insbesondere ist M eine Kette.

Beweis von Hilfssatz 1: Es sei $P = \{ y \in M \mid y \le x \text{ oder } f(x) \le y \}$
Es genügt zu zeigen, dass P zulässig ist. Sei $K \subset P$ eine Kette und $z \in M$ die obere Grenze.
Ist x eine obere Schranke von K, dann gilt: $z \le x$. und damit $z \in P$. Ist x keine obere Schranke, dann existiert ein $y \in K$ mit $y \not\le x$. Für dieses y gilt: $f(x) \le y \le z$ also $z \in P$. Wir müssen noch $f(P) \subset P$ zeigen. Sei $y \in P$: Ist $y < x \Rightarrow f(y) \le x$ da x TP ist, also $f(y) \in P$. Ist $y = x \Rightarrow f(y) = f(x) \ge f(x) \Rightarrow f(y) \in P$.
Bei $f(x) \le y \Rightarrow f(x) \le y \le f(y) \Rightarrow f(y) \in P$.
Damit ist P zulässig gezeigt und wegen der Annahme $P = M$ $\square$

Beweis von Hilfssatz 2: Wir zeigen: Die Menge der Trennpunkte ist zulässig. Sei $K \subset Q$ eine Kette und z die obere Grenze in M. Zu zeigen ist $z \in Q$. Sei $y \in M$ und $y < z$.
y ist dann keine obere Schranke von K. Es gibt also ein $x \in K$, für das $x \le y$ nicht erfüllt ist. Da x ein TP ist, ist x mit allen y vergleichbar. Es gilt also $y < x$.
Deshalb $f(y) \le x \le z$, da x Trennpunkt.
Damit ist $y < z \Rightarrow f(y) \le z$ gezeigt, also $z \in Q$.
Bleibt $f(Q) \subset Q$ zu zeigen. Sei $x \in Q$, wir müssen $f(x)$ Trennpunkt zeigen. Sei $y < f(x)$. Wegen $x \in Q$ ist $y \le x$, da $f(x) \le y$ nicht zutrifft. Falls $y = x$, dann $f(y) = f(x)$ $\le f(x)$. Bei $y < x$ folgt $f(y) \le x \le f(x)$ ebenfalls.
Also $f(x)$ ist ein TP. Damit ist Q zulässig und wegen der Annahme $Q = M$ $\square$

Beweis des Fundamentallemmas:
Wir nehmen an: M enthält keine echten zulässigen Teilmengen. Dann ist nach HS 1 jeder Punkt ein TP und nach HS 2 M eine Kette. Sei $z \in M$ die obere Grenze, dann gilt: $z \leq f(z) \leq z$, da $f(z) \in M$ und deshalb die obere Grenze z ein Fixpunkt.

Das Zornsche Lemma hat einige wichtige Folgerungen in der Mengenlehre. Die bekannteste ist der Wohlordnungssatz.

12.13. Definition: Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Sie heißt wohlgeordnet, wenn die Ordnung vollständig ist und jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element hat.

Beispiel: $(\mathbb{N}, \leq)$ ist wohlgeordnet.
$(\mathbb{R}, \leq)$ ist nicht wohlgeordnet.

12.14. Satz (Zermelosche Wohlordnungssatz)
Jede Menge X kann wohlgeordnet werden.

Beweis: Betrachten $M = \{(Y, R) \mid Y \subset X, R \text{ eine Wohlordnung auf } X\}$
$M \subset 2^X \times 2^{X \times X}$ Setzen: $(Y_1, R_1) \leq (Y_2, R_2)$
falls $Y_1 \subset Y_2$, $R_2|_{Y_1} = R_1$ [genauer $R_1 = R_2 \cap (Y_1 \times Y_1)$] und jedes Element von $Y_2 \setminus Y_1$ größer als Elemente von Y_1 ist.
Zu zeigen: Jede Kette $K \subset M$ hat eine obere Grenze.
Sei $K = \{(Y_i, R_i)\}_{i \in I} \subset M$ eine Kette.
Dann ist $\bigcup_{i \in I} Y_i = Y \subset X$ und $\bigcup_{i \in I} R_i = R$ eine Wohlordnung auf Y: Sei $P \subset Y$ eine nichtleere Menge und $x \in P$. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $x \in Y_i$. $P \cap Y_i \neq \emptyset$ und hat ein kleinstes Element $a \in P \cap Y_i$, da R_i eine Wohlordnung ist.
Sei $y \in P$ beliebig. $y \in Y_j$ und wir können $(Y_i, R_i) \leq (Y_j, R_j)$ annehmen, da wir eine Kette haben.
Gilt $y \in Y_i$, dann ist $a \leq y$. Gilt $y \notin Y_i$ also $y \in Y_2 \setminus Y_1$, dann gilt $a \leq y$ bzgl. R_2, da alle Elemente von $Y_2 \setminus Y_1$ größer als Elemente von Y_1 sind. a ist also kleinstes Element.
Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element $(Z, S) \in M$. Wir behaupten: $Z = X$.
Angenommen $x_0 \in X \setminus Z$, dann können wir auf $Z \cup \{x_0\}$ eine Wohlordnung einführen

durch $z < x_0 \ \forall z \in Z$. Ein Widerspruch zur Maximalität. Also $\leq$ ist eine Wohlordnung auf $X = Z$ □

Aus dem Wohlordnungssatz lässt sich das Auswahlaxiom leicht folgern:
sei $\{M_i\}_{i \in I}$ eine Familie von nichtleeren Mengen,
$M = \bigcup_{i \in I} M_i$ Wir betrachten eine Wohlordnung auf M und nehmen als Auswahlfunktion $f: I \to M$
$f(i) :=$ kleinstes Element von M_i.
$f \in \prod_{i \in I} M_i \neq \emptyset$ □

13) Mächtigkeit von Mengen

13.1. Definition: Zwei Mengen M, N heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f: M \to N$ gibt. $|M| = |N|$
Endliche Mengen sind gleichmächtig, wenn sie die selbe Anzahl von Elementen haben. Für unendliche Mengen verfeinert Mächtigkeit unsere Notation $|M| = \infty$
z.B. M ist abzählbar unendlich, wenn $|M| = |\mathbb{N}|$
sonst überabzählbar, z.B. $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$
Es gibt sehr sehr große Mengen. Das folgt mit:

13.2. Satz: Eine Menge M und ihre Potenzmenge haben nie die gleiche Mächtigkeit.

Beweis: Angenommen $f: M \to 2^M$ ist eine Bijektion.
Dann betrachten wir
$A = \{x \in M \mid x \notin f(x)\}$ und das Element $a \in M$ mit $f(a) = A$. Dann gilt: $a \in A \Rightarrow a \notin A$
$a \notin A \Rightarrow a \in A$. Widerspruch. ↯