

$$\text{Also } g(DV(p_1, \dots, p_r)) = g(DV(q_1, \dots, q_r)) \\ \Rightarrow \exists \varphi \in \mathcal{G}_+ \quad DV(p_1, \dots, p_r) = DV(\varphi(p_1), \dots, \varphi(p_r)) \\ \Rightarrow \exists \varphi \in \text{PGL}(2, K) \text{ mit } \varphi(p_i) = q_i \\ \Rightarrow \varphi(K_1) = \varphi(K_2)$$

4.19. Definition: Sei $q(x) \in K[x_1, \dots, x_n]$ ein homogenes quadratisches Polynom. Dann heißt

$$V(q) = \{x_1, \dots, x_n\} \in P^n(K) \mid q(x) = 0\}$$

eine projektive Quadrik.

Wir können eine Gleichung q in der Form $q(x) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $A \in K^{(n+1) \times (n+1)}$ eine symmetrische Matrix schreiben, falls $2 \neq 0 \in K$.

Im Fall $K = \mathbb{R}$ helfen wir in LA I in der motivischen Klassifikation von Quadriken gesehen, dass der Rang von A und die Signatur von A eine entscheidende Rolle für die Gestalt der Quadrik spielt. Im projektiven wird die Situation aufrechter:

4.20. Satz (Projektive Klassifikation von Quadriken):

Sei $Q \in P^n(\mathbb{R})$ eine Quadrik. Dann ist Q projektiv quivalent zu einer der folgenden Quadriken

$$Q_{k,m} = \{x_1, \dots, x_m\} \in P^n(\mathbb{R}) \mid x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2 = 0$$

für ein Paar k, m mit $0 \leq k \leq m \leq n$.

Insbesondere gilt: Zwei Quadriken Q_1, Q_2 definiert durch $(x_1, \dots, x_m) A_i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$ mit $A_i \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$ symmetrisch, sind projektiv quivalent genau dann, wenn

$$\text{rang } A_1 = \text{rang } A_2 \text{ und } |\text{sgn}(A_1)| = |\text{sgn}(A_2)|$$

(Erinnerung: $\text{sgn}(A) \geq \text{pos. Eigenwerte} - \text{neg. Eigenwerte}$ (Anzahl!))

Beweis: Sei $A \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$ symmetrisch, die Matrix für $q(x) = x^T A x$. Dann existiert ein $S \in \text{SO}(m+1, \mathbb{R})$, also $S^{-1} = {}^t S$, sodass

$${}^t S A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots, 0, \dots)$$

mit etwa $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0$ und $\lambda_{k+1} < 0, \dots, \lambda_m < 0$ und $\lambda_{m+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$

Beobachten: $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\lambda_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_m} \\ 1 \end{pmatrix}$ Dann gilt: $B = {}^t B$

$${}^t B {}^t S A S B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

ist $(m+1) \times (m+1)$

$$\Rightarrow C = SB \in GL(m, R) \\ \text{für } B \in PGL(m+1, R)$$

$$P_C(Q) = Q_{k+1,m} \\ P_C(Q_{k+1,m}) = Q$$

$$(y_0, \dots, y_m) A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = BC \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (x_0, \dots, x_m)^t B S A S B \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ = x_0^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2$$

Für die zweite Aussage bemerken wir, dass $q(x) = 0$ und $-q(x) = 0$ die gleiche Quadrix im Projektiven definiert. Also definiert $A \in R^{(m+1) \times (m+1)}$ q , dann definiert $-A$ die Matrix für $-q$.

$$\text{Nun gilt: } \text{rang } A = m+1$$

$$\text{sgn } A = 2k+1-m = k+1-(m-k)$$

nach dem Sylvester'schen Trägheitssatz:

$$\text{Asymmetrisch} \Rightarrow \text{rang}(SAS) = \text{rang}(A) \quad \forall S \in GL(m+1, R)$$

$$\text{sgn}(SAS) = \text{sgn}(A) \quad \forall S \in GL(m+1, R)$$

Da $\text{sgn}(A) = -\text{sgn}(-A)$ folgt die zweite Behauptung.

Beispiel: $m=3$

Rang	Signatur	Gleichung	in $U_3 \subseteq \mathbb{R}_3$ Bild	Name
1	1	$x_0^2 = 0$		Doppeldreieck
2	0	$x_0^2 - x_1^2 = 0$		Zwei Ebenen $x_0^2 - x_1^2 = (x_0 - x_1)(x_0 + x_1)$
2	2	$x_0^2 + x_1^2 = 0$		Stammgerade zweier komplex konj. Ebenen $(x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$
3	1	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$		Kegel
3	3	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$		isolierter Punkt
4	0	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$		Regelfläche $\det \begin{pmatrix} x_0 - x_2 & x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 & x_0 + x_2 \end{pmatrix}$
4	2	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$		Kugel in U_3 2-stöckiger in $U_0 \dots$ Hypersphäre U_2

Rang (Signatur) Gleichung Bild Name

4 4 $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ $\emptyset$ Quadrik ohne reelle Punkte

Bemerkung: Über $\mathbb{C}$ wird die Klassifikation noch einfacher:

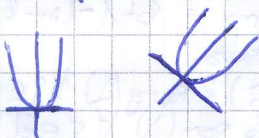
4.21 Satz: Jede Quadrik $Q = \{ (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \mid (x_0, \dots, x_m) A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0 \}$

mit $A \in \mathbb{C}^{(m+1) \times (m+1)}$ symmetrisch, ist projektiv äquivalent zu einer der Quadriken

$$Q_m = \{ (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \mid x_0^2 + \dots + x_m^2 = 0 \}$$

Dabei ist $m+1 = \text{rang } A$.

Bemerkung: Auch für affine Geometrie ist der projektive Schnittpunkt möglich.



sind Parabeln.

Eine Parabel ist eine Quadrik, die die unendlich ferne Gerade in einem Punkt berührt.

Preisaufgabe: ~~Drei Punkte in $\mathbb{R}^2$ mit keiner~~

Drei die Eckpunkte eines Vierecks in $\mathbb{R}^2$ gibt immer eine Parabel außer im Fall, dass das Viereck ein Parallelogramm ist (Frist: 29. Juni)

4.22. Ein Phänomen der projektiven Geometrie ist, dass Mengen von geometrischen Objekten selbst häufig projektive Räume bilden.

Beispiel: Kreis: $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$

$(a, b, c, d) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ beschreibt den Kreis.

Für Hyperflächen haben wir $H = \{ (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \mid a_0 x_0^2 + \dots + a_m x_m^2 = 0 \}$ dass die Koeffizienten $(a_0, \dots, a_m)$ die Hyperflächen bestimmen und a und λa bestimmen die gleiche Hyperfläche,

$$\{ H \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \mid H \text{ Hyperfläche} \} \longleftrightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \setminus \{ a_0 = \dots = a_m = 0 \}$$

$H \longleftarrow a \quad H \longrightarrow \text{Koeffizienten der Gleichung bis auf Skalarr.}$

Zunächst Definition: V sei ein n -dimension. K -Vektorraum.
Dann heißt es eine Abbildung:

4.23: Definition + Satz: $\{H \in P(V) \mid H \text{ Hyperebene}\} \longleftrightarrow P(V^*)$
wobei $V^* = \text{Hom}(V, K)$ der Dualraum ist.
Man merke $P(V^*) = P^V(V)$ den zu $P(V)$ dualen projektiven Raum

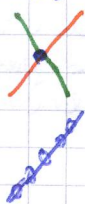
Beweis: $f \in V^*$, Ker $f \subset V$ aber 1-Unterraum, also
 $P(\text{Ker } f) \subset P(V)$ ist eine Hyperebene, d.h.
 $\text{Ker } f = \text{Ker } \lambda f$ induziert durch eine
skalierung Abbildung

$P(V^*) \rightarrow \{H \in P(V) \mid H \text{ Hyperebene}\}$
Die Abbildung ordnet eine Hyperebene der Gleichung zu,
d.h. die Linearform f mit $H = P(\text{Ker } f)$ und f bis auf
Skalar bestimmt. $\square$

Da $V^{**} \cong V$ kanonisch ist $P^V(V) = P(V)$

Beispiel: $n=2, K=R$

$P^2(R)$



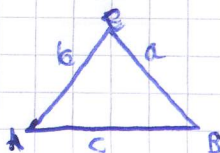
$P^2(R) = P^2(R)$



Die Punkte einer Gerade in $P^2(R)$ entsprechen einem Bündel von ~~Geraden~~ Geraden durch 1 Punkt im $P^2(R)$.

In der ebenen projektiven Geometrie bleibt ein Satz, der nur die
Wörter Punkt, Gerade, Aufspannen, schneiden verwendet
gültig, wenn man die Wörter Punkt $\leftrightarrow$ Gerade,
Gerade $\leftrightarrow$ Punkt, zwei Geraden schneiden $\leftrightarrow$ zwei Punkte spannen Gerade auf, (+ umgekehrt) ersetzt.

4.24. (Beispiel) Satz (Desargues): Es sei $A, B, C \in P^2(K)$ drei Punkte
die nicht auf einer Geraden liegen.
 $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$
Es seien A', B', C', a', b', c' ein weiteres
Dreieck.

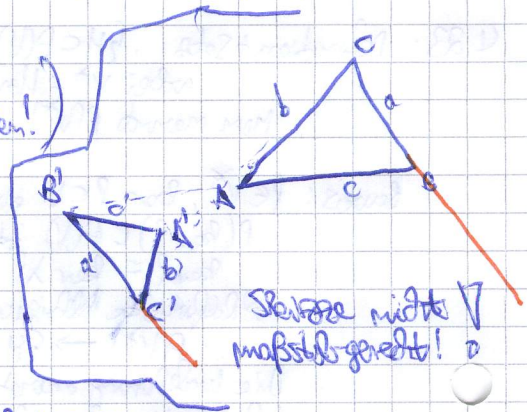


Die Schnittpunkte $a'a'$, $b'b'$, $c'c'$ liegen auf einer Geraden genau dann, wenn die Geraden AA' , BB' , CC' sich in einem Punkt schneiden.

(Die gleichförmigen Geraden in der Skizze sollten sich schneiden!)

Die drei Schnittpunkte liegen auf einer Geraden.

Wegen der Dualität reicht es dabei eine Richtung zu zeigen.



4.25. Hilbert hat dieses Theorem bei seiner Untersuchung zu den Axiomen der Euklidischen Geometrie dazu verwendet, zu sagen, dass es egal ist, was die Objekte sind, in denen in einem Axiomensystem die Rede ist, sondern es nur darauf ankommt, wie in den Axiomen die Objekte in Beziehung stehen.

Axiome der projektiven Inzidenzgeometrie:

- 1) Durch je zwei vers. Punkte geht genau eine Gerade.
- 2) Je zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
- 3) Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.
- 3') Es gibt drei Geraden, die sich nicht in einem Punkt schneiden.