

(IV) Es genügt ebenfalls für Elemente $t = x_1 \wedge \dots \wedge x_r \in \wedge^r V$
 und $s = y_1 \wedge \dots \wedge y_r \in \wedge^r V$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} t \wedge s &= x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_r \\ &= (-1)^{r(r-1)/2} x_1 \wedge \dots \wedge x_{r-1} \wedge y_1 \wedge x_r \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_r \\ &= (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} x_1 \wedge \dots \wedge x_{r-1} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_r \wedge x_r \\ &= (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} y_1 \wedge \dots \wedge y_r \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_r \\ &= (-1)^{r \cdot r} s \wedge t = s \wedge t \quad \square \end{aligned}$$

Einige Anwendungen der äußeren Algebra:

8.16. Konzeptuelle Definition der Determinante:

Sei V eine n -dimensionale K -VR und $f \in \text{End}(V)$, dann ist
 $\wedge^n f \in \text{Hom}(\wedge^n V, \wedge^n V) = \text{End}(\wedge^n V)$
 Da $\wedge^n f$ eindimensional ist, ist $K \cong \text{End}(\wedge^n V)$ via
 $t \mapsto t \wedge f$

Die Determinante $\det(f)$ ist ~~das Bild des~~ das Bild des
 linearen Isomorphismus vom $\wedge^n f$:

$$\begin{array}{ccc} K & \xleftarrow{\cong} & \text{End}(\wedge^n V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \det f & \xleftarrow{\quad} & \wedge^n f \end{array} \quad \square$$

8.17. Die konzeptuelle Interpretation der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms:

V n -dimensionaler K -VR, $f \in \text{End}(V)$, $A = M_B^B(f)$

$$\begin{aligned} \chi_f(t) &= \chi_A(t) = \det(A - tE) \in K[t] \\ &= \det A + c_{n-1}(-t) + \dots + c_1(-t)^{n-1} + (-t)^n \\ &= \sum_{k=0}^n c_k (-t)^k \end{aligned}$$

Also: $c_n = \det A = \det f$ $c_1 = \text{tr } A = (a_{11} + \dots + a_{nn})$
 $= \text{tr } f$

8.18. Satz: Mit Notation wie oben gilt:

$$c_k = \text{tr}(\wedge^k f)$$

$$N_B: \wedge^k V \rightarrow \wedge^k V$$

Beweis: $A = (a_{ij})$, $B = A - tE = (b_{ij})$

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \cdot b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$A - tE = \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-t \end{pmatrix}$$

Einschub: Wiederholung: Tensorprodukt, universelle Eigenschaft
 (18.06.) Quotientenräume, Konstruktion, äußere Potenzraum
 Äußere Algebra, Algebrastruktur ($\Rightarrow$ siehe Kapitel 6-8)

Zu dem Koeffizienten t^{n-k} tragen nur solche $\sigma \in S_n$ bei, die wenigstens $n-k$ Indizes festlassen.

Es bezeichne $A_{I,J}$ die $k \times k$ -Untermatrix von A mit Zeilen und Spalten $\{i_1, \dots, i_k\} = I$.

$N \in V \rightarrow N \in V$ bildet das Basiselement $e_I = e_{i_1} \dots e_{i_k}$ auf $\sum_{I=I} \det A_{I,J} e_{i_1} \dots e_{i_k}$ ab.

$\Rightarrow \det(N^k) = \sum_{I=I} \det A_{I,J}$
 Koeffizient von $(t)^{n-k}$ ist: $\sum_{I=I} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \cdot \prod_{j \in J} a_{\sigma(j)} \left(\prod_{j \in J} (-t) \right)$
 $\sigma|_J = \text{id}_J$

$$J^c = \{1, \dots, n\} \setminus J$$

$$\sigma|_J: J \rightarrow J, \text{ da } \sigma(J^c) = J^c$$

$$\text{Also: Koeffizient: } \sum_{|I|=k} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{\mu=1}^k a_{\sigma(\mu)} \delta_{\sigma(\mu)} = \sum_{I=I} \det A_{I,J} = \det(N^k) \quad \square$$

8.19. Determinantenentwicklung nach k Spalten gleichzeitig

$$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$$

$$J = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

$$J^c = \{1, \dots, n\} \setminus J$$

dann gilt:

$$\det A = \sum_{|I|=k} \text{sign} \left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & 1 \\ J & J^c \end{smallmatrix} \right) \det A_{I,J} \det A_{I,J^c}$$

wobei $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & 1 \\ J & J^c \end{smallmatrix} \right) \in S_n$ die Permutation $\begin{smallmatrix} n \\ \vdots \\ 1 \end{smallmatrix}$ gemäß der Wertetabelle beschreibt.

$$\text{Beispiel: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$J = \{1, 2\}$$

$$J^c = \{3, 4\}$$

$$\det A = \sum_{|I|=2} \text{sign} \left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & 1 \\ J & J^c \end{smallmatrix} \right) \det A_{I,J} \det A_{I,J^c}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \right) \det \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} + \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \left\{ -1 \right. \\ &\quad \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} + \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} \\ &\quad \left. - \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Beweis: $V = K^m$, $e_j \mapsto \sum a_{ij} e_i$
 $\det f = \det K f$ $e_1 \dots e_m \mapsto \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} e_i \right) \wedge \dots$

$$= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j & & j \end{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e_i \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^m a_{im} e_i \right)$$

$$\dots \wedge \left(\sum_{i=1}^m a_{ik} e_i \right) \wedge$$

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{i1} e_i \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^m a_{im} e_i \right)$$

$$= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j & & j \end{pmatrix} \sum_{i=1}^m \det A_{ij} e_{i1} \wedge \dots \wedge e_{im} \sum_{i=1}^m \det A_{ik} e_{i1} \wedge \dots \wedge e_{im}$$

$$= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j & & j \end{pmatrix} \sum_{i=1}^m \binom{1 \dots m}{i, i} \det A_{ij} \det A_{ik} e_{i1} \wedge \dots \wedge e_{im}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j & & j \end{pmatrix} \det A_{ij} \det A_{ik} \right] e_{i1} \wedge \dots \wedge e_{im} \quad \square$$