durch $z < x_0$ $\forall z \in Z$. Ein Widerspruch zur Maximalität. Also $\leq$ ist eine Wohlordnung auf $X = Z$ □

Aus dem Wohlordnungssatz lässt sich das Auswahlaxiom leicht folgern:
sei $\{M_i\}_{i \in I}$ eine Familie von nichtleeren Mengen,
$M = \bigcup_{i \in I} M_i$. Wir betrachten eine Wohlordnung auf M und nehmen als Auswahlfunktion $f: I \to M$
$f(i) :=$ kleinstes Element von M_i.
$f \in \prod_{i \in I} M_i \neq \emptyset$ □

13) Mächtigkeit von Mengen

13.1. Definition: Zwei Mengen M, N heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f: M \to N$ gibt. $|M| = |N|$
Endliche Mengen sind gleichmächtig, wenn sie die selbe Anzahl von Elementen haben. Für unendliche Mengen verfeinert Mächtigkeit unsere Notation $|M| = \infty$
z.B. M ist abzählbar unendlich, wenn $|M| = |\mathbb{N}|$
sonst überabzählbar, z.B. $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$
Es gibt sehr sehr große Mengen. Dies folgt mit:

13.2. Satz: Eine Menge M und ihre Potenzmenge haben nie die gleiche Mächtigkeit.

Beweis: Angenommen $f: M \to 2^M$ ist eine Bijektion.
Dann betrachten wir
$A = \{x \in M \mid x \notin f(x)\}$ und das Element
$a \in M$ mit $f(a) = A$. Dann gilt: $a \in A \Rightarrow a \notin A$
$a \notin A \Rightarrow a \in A$. Widerspruch. ↯

13.3. Definition: M, N Mengen. M ist mächtiger als N (besser: M ist wenigstens so mächtig wie N), wenn es eine injektive Abbildung $N \hookrightarrow M$ gibt. $(|M| \geq |N|)$

13.4. Satz: M, N Mengen, dann gilt:
a) Es gilt: $|M| \geq |N|$ oder $|N| \geq |M|$
b) Gilt $|M| \geq |N|$ und $|N| \geq |M|$, dann gilt $|M| = |N|$

Beweis: a) Wir verwenden das Zornsche Lemma.

Sei $\mathcal{M} = \{(A,f) \mid A \subset M,\ f: A \hookrightarrow N \text{ injektiv}\}$

$\mathcal{M}$ ist partiell geordnet vermöge

$(A,f) \leq (B,g)$ falls $A \subset B$ und $g|_A = f$.

Ist $K \subset \mathcal{M}$ eine Kette, dann ist

$B = \bigcup_{(A,f)\in K} A$ und $g: B \to N$ definiert durch

$g(x) = f(x)$ falls $x \in A$, $(A,f) \in K$ wohldefiniert und injektiv, da wir eine Kette haben.

Sei (C,h) ein maximales Element. Zwei Fälle sind denkbar:

1) $C = M$ und daher $h: M \hookrightarrow N$ injektiv.

2) $C \subsetneq M$. Dann muss $h(C) = N$ gelten, denn wäre $N \setminus h(C) \neq \emptyset$ etwa $y_0 \in N \setminus h(C)$ und $x_0 \in M \setminus C$ so wäre $C \cup \{x_0\}$ und

$$g(x) = \begin{cases} h(x), & x \in C \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$$

ein größeres Paar. Widerspruch zur Maximalität.

Also $h(C) = N$. Da h injektiv, ist

$h^{-1}: N \to C \subset M$ eine Injektion und damit ist $|N| \leq |M|$

b) Nach Voraussetzung existieren injektive Abbildungen $f: M \to N$ und $g: N \to M$. Zu zeigen ist:

Es existiert eine bijektive Abbildung $M \to N$

Sei $x \in M$. Wir betrachten die endliche oder unendliche Folge $x_0 := x \in M$, $x_1 \in N$, $x_2 \in M$, $x_3 \in N$ usw.

mit $g(x_1) = x_0$, $f(x_2) = x_1$ usw.

Die Elemente sind wegen der Injektivität von f und g eindeutig bestimmt. Wir setzen

$r(x) = n$ falls sich die Folge $x_0, \dots, x_n$ nicht erweitern lässt, d.h. x_n nicht im Bild von f oder g.

Lässt sich die Folge unendlich oft fortsetzen, setzen wir $r(x) = \infty$. Sei $M_0 = \{x \in M \mid r(x) \equiv 0 \mod 2\}$

$M_1 = \{x \in M \mid r(x) \equiv 1 \mod 2\}$

$M_\infty = \{x \in M \mid r(x) = \infty\}$

Dann ist $M = M_0 \cup M_1 \cup M_\infty$.

Analog: $N = N_0 \cup N_1 \cup N_\infty$.

Offenbar gilt: $f(M_1) \subset N_0$
$f(M_0) = N_1$
$f(M_\infty) = N_\infty$

Damit ist
$h: M \to N$ definiert
durch $h(x)$ mit $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in M_0 \cup M_\infty \\ g^{-1}(x) & x \in M_1 \end{cases}$

h ist eine Bijektion. □
Mächtigkeiten lässt sich auch mit surjektiven Abbildungen klären.

13.5. Satz: Sei $g: M \to N$ eine surjektive Abbildung, dann gilt: $|M| \geq |N|$.

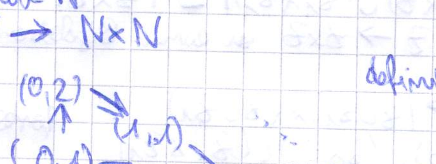
Beweis: Nach Voraussetzung sind die Mengen $f^{-1}(N) \subset M$ alle nichtleer. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Funktion $g: N \longrightarrow \bigcup_{m \in N} f^{-1}(N) = M$ mit

$g(m) \in f^{-1}(m)$. g ist injektiv, da: $f(g(m)) = m$, also $|M| \geq |N|$ □

13.6. Satz: Sei M eine unendliche Menge, dann gilt: $|M \times M| = |M|$.

Beispiel: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$, $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$

Beweis: Für eine abzählbar unendliche Menge etwa $\mathbb{N}$
$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$



definiert eine Bijektion.

Für überabzählbare unendliche Mengen verwenden wir das Zornsche Lemma.
Sei $\mathcal{M} = \{(X, f) \mid X \subset M \text{ und } f: X \to X \times X \text{ eine Bijektion}\}$
$\mathcal{M} \neq \emptyset$ da $|\mathbb{N}| \leq |M|$

M ist partiell geordnet vermöge $(X,f) \leq (Y,g)$
falls $X \subset Y$ und $f = g|X$.
Offensichtlich hat jede Kette eine obere Grenze.
Es gibt also ein maximales Element.
$(Z,h) \in M$

Zwischenüberlegungen:
Es sei $\{Q_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Mengen Q_i
mit $|Q_i| \leq |Z|$ und Indexmenge I mit $|I| \leq |Z|$
Dann gilt
$$\left|\bigcup_{i \in I} Q_i\right| \leq |Z|$$

Beweis: Alle $Q_i \neq \emptyset$. Nach Voraussetzung existiert
$g_i : Z \to Q_i$ surjektiv und eine surjektive Abbildung
$f : Z \to I$. Die Abbildung

$$Z \times Z \to \bigcup_{i \in I} Q_i \qquad (z_1, z_2) \mapsto g_{f(z_1)}(z_2)$$

ist surjektiv. $Z \xrightarrow{bij} Z \times Z \xrightarrow{surj} \bigcup Q_i$
dann ebenfalls $\square$

Angenommen $Z \neq M$. Wir zeigen zunächst, dass
$|M \setminus Z| \geq |Z|$ nicht auftritt.
Wäre dies der Fall, so gibt es $Z_1 \subset M \setminus Z$
mit $|Z_1| = |Z|$. Nach der Zwischenüberlegung
für $|I| = 2$ gilt $|Z \cup Z_1| \leq |Z|$, also
$|Z_1 \cup Z| = |Z|$. Ebenso
$|(Z \times Z_1) \cup (Z_1 \times Z) \cup (Z_1 \times Z_1)| = |Z \times Z| = |Z| = |Z_1|$
Also lässt sich $h : Z \to Z \times Z$ zu einer Bijektion

$$h_1 : Z \cup Z_1 \to (Z \cup Z_1) \times (Z \cup Z_1) \qquad \text{fortsetzen.}$$
$$(Z \times Z) \cup (Z_1 \times Z) \cup (Z \times Z_1) \cup (Z_1 \times Z_1)$$
Widerspruch zur Maximalität.
Also gilt $|M \setminus Z| \leq |Z|$
und daher mit der Zwischenüberlegung

$$|M| = |M \setminus Z \cup Z| = |Z| = |Z \times Z| = |M \times M| \ \square$$

13.7 Korollar (aus dem Beweis)
Sei M eine unendliche Menge, $\{Q_i\}_{i\in I}$ eine Familie von ~~[illegible]~~ Mengen mit $|Q_i| \leq |M|$ $\forall i \in I$ und $|I| \leq |M|$. Dann gilt:

$$\left| \bigcup_{i\in I} Q_i \right| \leq |M|$$

Beweis: Im vorangegangenen Beweis hatten wir dies für Mengen mit $|M| = |M\times M|$ gezeigt □

13.8. Satz: Sei V ein K-VR und $\{e_i\}_{i\in I}$ sowie $\{f_j\}_{j\in J}$ Basen von V. Dann gilt
$$|I| = |J|$$
Je 2 Basen haben die gleiche Mächtigkeit.

Beweis: Für $|I| < \infty$ und $|J| < \infty$ haben wir dies gezeigt.
Also ohne Einschränkung ist $\dim V = \infty$ vorausgesetzt.
Für $j \in J$ lässt sich f_j als eindeutige Linearkombination schreiben $f_j = \sum_{i\in I_j} \lambda_{ij} e_i$ mit $I_j \subset I$ endlich
$\lambda_{ij} \in K\setminus\{0\}$

Nach dem Korollar gilt: $\left|\bigcup_{j\in J} I_j\right| \leq |J|$
Sei $\tilde{I} = \bigcup_{j\in J} I_j$

Wir zeigen $\tilde{I} = I$. Angenommen $i_0 \in I\setminus\tilde{I}$
dann ist e_{i_0} eine endliche Linearkombination der f_j und jedes f_j eine endliche LK der e_i mit $i \in \tilde{I}$.
Dann ist e_{i_0} linear abhängig von e_i $i \in \tilde{I}$, Widerspruch.
Also $I = \tilde{I}$, also $|I| \leq |J|$.

$|J| \leq |I|$ zeigt man genauso. □

13.9. Bemerkung: Sei V mit $\{e_i\}_{i\in I}$ ein K-VR und W ein weiterer. Für eine lineare Abbildung $f: V \to W$ lassen sich die Bilder der Basisvektoren beliebig vorgeben:
Etwa $\{w_i\}_{i\in I}$ Familie von Vektoren von W, dann ist
$f: V \to W$ $\quad f(\sum_{\text{endl.}} \lambda_i e_i) = \sum_{\text{endl.}} \lambda_i f(e_i) = \sum_{\text{endl.}} \lambda_i w_i$
die einzige lineare Abbildung mit $f(e_i) = w_i$.

13.10. Satz: Sei V ein K-VR, $v \in V$, $v \neq 0$. Dann existiert eine Linearform $f \in V^*$ mit $f(v) \neq 0$. Insbesondere ist also die kanonische Abbildung
$i: V \to V^{**}$ injektiv.

Beweis: Ergänzen v zu einer Basis $\{v_i\}_{i \in I}$ von V etwa $v_1 = v$ und definieren f durch $f(v_1) = 1$ und $f(v_i) = 0$, $i \neq 1$. □

13.11. Satz: Sei V ein K-VR, $\{e_i\}_{i \in I}$ eine Basis, also
$V \cong \bigoplus_{i \in I} K$. Dann gilt
$$V^* \cong \prod_{i \in I} K.$$

Beweis: Sei $f \in V^*$, dann ist $I \to K$ mit $i \mapsto f(e_i)$ ein Element von $\prod_{i \in I} K$. Umgekehrt für $\varphi \in \prod_{i \in I} K = \{I \to K\}$ ist $f: V \to K$ definiert durch $f(e_i) = \varphi(i)$ eine wohldefinierte Linearform. □

Corollar: Für unendlichdimensionale K-VR ist
$i: V \to V^{**}$ nie ein Isomorphismus.

Beweis: $V = \bigoplus_{i \in I} K$ $\quad v = (1) \quad v \in \prod_{i \in I} K$
$v \in V^* \setminus V$ $\quad v(i) = 1 \quad \forall i \in I$
$\{v, e_i\}$ sind linear unabhängig

Wir ergänzen $\{v, e_i\}$ zu einer Basis $\{f_j\}_{j \in J}$ von V^* mit $f_1 = v$, $1 \in J$, $f_i = e_i$ und setzen
$f \in V^{**}$ durch $f(f_j) = \begin{cases} 1 & f_j = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$f \in V^{**} \setminus V$ □

Beispiel: $K = F_2$, I unendliche Menge
$$V = \bigoplus_{i \in I} K = \bigoplus_{i \in I} F_2 \underset{bij.}{\cong} \{A \subset I \mid |A| < \infty\}$$

$$\{A \subset I \mid |A| \leq m\} \cong I \times \ldots \times I \quad (m \text{ Mal})$$
$\Rightarrow |I| \leq |\{A \subset I \mid |A| \leq m\}| \leq |I \times \ldots \times I| = |I|$
$|V| = |\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{A \subset I \mid A \leq m\}| \leq |I|$
da $\quad |\mathbb{N}| \leq |I|$
Also für F_2 gilt $|\bigoplus_{i \in I} K| = |I|$ für I unendlich.

$V^* = \prod_{i \in I} \mathbb{F}_2 \cong \{A \subset I \mid A \text{ beliebig}\} = 2^I$

Also wenn $\mathfrak{J}$ eine Basis von V^*

$|\mathfrak{J}| = |V^*| = |2^I| > |I|$.

Übung: Was passiert bei beliebigen K?

13.12. Bemerkung: Russel hat bemerkt, dass man den Mengenbegriff nicht zu frei verwenden darf.
Die Menge aller Mengen macht keinen Sinn.
$N = \{M \subset M \mid M \notin M\}$
$N \in N \Rightarrow N \notin N \Rightarrow N \in N$
Das Problem ist, dass die Elemente von M nicht wohldefiniert sind. Man spricht deshalb von der Kategorie der Menge
2) Cantorsche Kontinuumshypothese. $\mathbb{N}$ ist kleinste unendliche Menge $|2^{\mathbb{N}}| = \mathbb{R}$

Cantor: Für $A \subset \mathbb{R}$, A ∞ gilt: $|A| = |\mathbb{N}|$ oder $|A| = |\mathbb{R}|$
Cohen(?) hat gezeigt, dass die Kontinuumshypothese aus den Axiomen der Mengenlehre weder beweisen noch widerlegen lässt.

LA-101