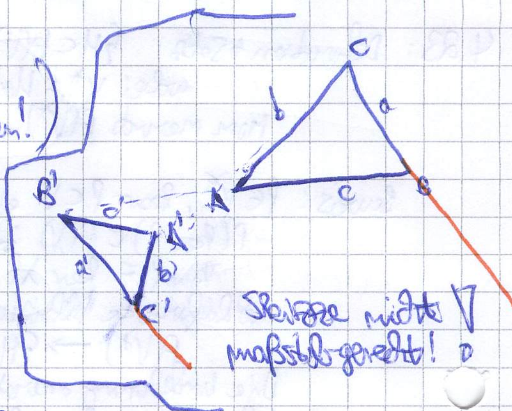
Die Schnittpunkte $a \cap a'$, $b \cap b'$, $c \cap c'$ liegen auf einer Geraden genau dann, wenn die Geraden $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ sich in einem Punkt schneiden.

(Die gleichfarbigen Geraden in der Skizze sollten sich schneiden!)



Die drei Schnittpunkte liegen auf einer Geraden.

Wegen der Dualität reicht es dabei eine Richtung zu zeigen.

Skizze nicht maßstabsgerecht!

4.25. Hilbert hat dieses Phänomen bei seiner Untersuchung zu den Axiomen der Euklidischen Geometrie daran verdeutlicht, zu sagen, dass es egal ist, was die Objekte sind, von denen in einem Axiomensystem die Rede ist, sondern es nur darauf ankommt, wie in den Axiomen die Objekte in Beziehung stehen.

Axiome der projektiven Inzidenzgeometrie:

1) Durch je zwei vers. Punkte geht genau eine Gerade.
2) Je zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
3) Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.
3') Es gibt drei Geraden, die sich nicht in einem Punkt schneiden.

Cinderella-Experiment: Satz von Desargues!
Nachrechnen:

4.26. Bemerkung: $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in K^2 = U_2 \subset P^2$ sind zwei verschiedene Punkte, dann definiert

$$f = \det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \in K[x,y]$$ die Gerade durch die Punkte.

$$f = x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1$$

$f=0$ definiert eine Gerade außer $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$

$f(x_1,y_1)=0 \qquad f(x_2,y_2)=0$

4.27 Corollar: $(x_1,y_1),\dots,(x_3,y_3) \in K^2$ liegen auf einer Geraden.

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1\end{pmatrix} = 0$$

2) 2 Geraden $L_i \subset P^2(K)$ definiert durch $L_i = \{(x:y:1) \mid a_i x + b_i y + c_i = 0\}$ schneiden sich im Punkt $P = (b_1c_2 - b_2c_1 : -(a_1c_2 - a_2c_1) : a_1b_2 - a_2b_1) \in P^2$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 \\ -b_1c_2 - a_2c_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Beachten Sie: Der Repräsentant von P ist $\neq 0 \in K^3$ genau dann wenn $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix}$ die Zeilen der Matrix nicht proportional sind. $\Leftrightarrow L_1 \neq L_2$

Ferner: $p \in U_2 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

$\Leftrightarrow L_1$ und L_2 sind nicht parallel.

Dies ist klar: $(a_1, b_1, c_1)\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix} = 0$ (Cramersche Regel)

Corollar: L_1, L_2, L_3 schneiden sich in einem Punkt

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} = 0.$$

Verifikation mit Computer-Algebra.

Betrachtet werden

$$\left.\begin{array}{l} \overline{P_1P_2} \cap \overline{P_4P_5} \\ \overline{P_2P_3} \cap \overline{P_5P_6} \\ \overline{P_3P_4} \cap \overline{P_6P_1} \end{array}\right\}$$

liegen auf einer Geraden, genau dann wenn $P_1, \dots, P_6$ auf einer Konik liegen. (Konik = Quadrik im P^2)

Skizze zu Pascal-Theorem siehe Cinderella-Skript

4.28. Satz (von Pascal):

$P_1, \dots, P_6$ sechs versch. Punkte im P^2

Die 3 SP (wie oben) liegen auf einer Geraden genau dann wenn $P_1, \dots, P_6$ auf einer Konik liegen.

Beweis: Cinderella-Experimente + Computer Algebra Verifikationen

Bemerkung: Gegeben seien $(x_1, y_1), \dots, (x_5, y_5) \in K^2 \subset U_2 \subset P^2$.

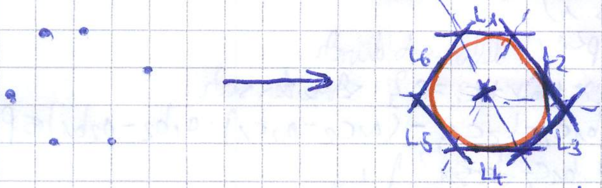
Dann existiert eine quadratische Gleichung, die eine Quadrik durch 5 Punkte definiert.

Falls keine 4 Punkte auf einer Geraden liegen, ist

$$q(x,y) = \det\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz von Pascal im P^2 :→ dualer Satz $\check{P}^2$ — Satz von Brianchon

gegeben 6 Punkte — gegeben 6 Geraden



$L_1 \cap L_2,\ L_4 \cap L_5$

$L_2 \cap L_3,\ L_5 \cap L_6$

$L_3 \cap L_4,\ L_6 \cap L_1$

schneiden sich in einem Punkt genau dann, wenn $L_1, \dots, L_6$ einer Konik umgeschrieben sind.

Pascal ⇒ Brianchon

P^2 $\check{P}^2$

Es reicht zu zeigen, dass wenn $p \in C$ eine Konik durchläuft, die Geraden $L_p \subset \check{P}^2$ eine Konik umhüllen.

P^2 $(x:y:z)$ $\check{P}^2$ $(a:b:c)$

$q(x,y,z) = (x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

mit $A \in K^{3\times 3}$ symmetrisch,

$\det A \neq 0$ $C = \{(x,y,z) \mid q(x,y,z) = 0\}$

$p(x:y:z) \mapsto L_p = \{(a:b:c) \in \check{P}_2 \mid ax+by+cz=0\}$

Es sei $\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$p(x:y:z) \in C$

Behauptung: $(a_0:b_0:c_0) \in L_p$

$0 = a_0x + b_0y + c_0z$

$= (x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$ da $p \in C$

$\Rightarrow$ $P^2 \to \check{P}^2$ $(x:y:z) \mapsto (a:b:c)$

wobei $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $P(C) = C'$ ebenfalls eine Konik

Behauptung: Die Punkte von C' $(a_0:b_0:c_0) \in C'$ erfüllen

$(a_0,b_0,c_0)A^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix} = 0$ also C' wird durch A^{-1} definiert.

$\|$

Beweis: $(x,y,z)^t A A^{-1} A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x,y,z)^t \overset{=A}{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$, da $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in C$

$q'(a,b,c) = (a,b,c)A^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$\operatorname{grad}(q') = 2A^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\operatorname{grad}(q')(a_0,b_0,c_0) = A^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$