

Beweis: $V = K^m$, $e_i \mapsto \sum a_{ij} e_j$
 $\det f = \det K^m f$ $e_1, \dots, e_m \mapsto \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e_i \right)_{j=1}^m$
 $= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j & \dots & j \end{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e_i \right)_{j=1}^m \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^m a_{im} e_i \right)$
 $\dots \wedge \left(\sum_{i=1}^m a_{iz} e_i \right) \wedge$
 $\left(\sum_{k=1}^m a_{k1} e_{k1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^m a_{im} e_{im} \right)$
 $= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j & \dots & j \end{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^m \det A_{ij} e_{i1} \dots e_{im} \right) \wedge \sum_{j=1}^m \det A_{jz}$
 $= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j & \dots & j \end{pmatrix} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \det A_{ij} \det A_{jz} \right) e_{i1} \dots e_{im}$
 $= \left[\sum \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ j & \dots & j \end{pmatrix} \det A_{jz} \det A_{jz} \right] e_{i1} \dots e_{im} \quad \square$

3) Bilinearformen und quadratische Formen

9.1. Definition: W, V zwei K -Vektorräume. Eine Bilinearform ist dann eine bilineare Abbildung $b: V \times W \rightarrow K$

Beispiel: 1) $V = K^m, W = K^m, B \in K^{m \times m}$ eine Matrix
 Dann ist durch $b(x, y) = {}^t x B y$ eine Bilinearform auf $K^m \times K^m$ gegeben.
 2) $W = V^*: V \times V^* \rightarrow K, (x, f) \mapsto f(x)$
 ist eine Bilinearform.

Bemerkung: 1) Im Prinzip ist jede Bilinearform auf endlichdimensionalen VR wie in Beispiel 1.
 Ist $A = \{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von V , und $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W und $b: V \times W \rightarrow K$ eine Bilinearform, dann ist durch $B = (b(v_i, w_j)) \in K^{m \times m}$ eine Matrix gegeben und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{b} & K \\
 \uparrow \text{Rsp} & & \parallel \\
 K^m \times K^m & \xrightarrow{\quad} & K \\
 (x, y) & \mapsto & {}^t x B y
 \end{array}$$

kommutiert.
 B heißt Strukturmatrix der Bilinearform $b: V \times W \rightarrow K$ bzgl. der Basen A, B .

2) Unter einem Basiswechsel $A = (v_1', \dots, v_n')$
 $B = (w_1', \dots, w_m')$ transformiert sich die Strukturmatrix
 wie folgt: $B' = {}^t S B T$
 wobei $S = M_A^A(\text{id}_V)$ und $T = M_B^B(\text{id}_W)$

9.2. Definition: Eine Bilinearform $b: V \times W \rightarrow K$ heißt
 nicht ausgeartet in der ersten Variablen, wenn
 $b(x, y) = 0 \quad \forall y \in W \Rightarrow x = 0 \in V$ gilt.
 Analog: nicht ausgeartet in der zweiten Variablen:
 Wenn $b(x, y) = 0 \quad \forall x \in V \Rightarrow y = 0 \in W$ gilt.

9.3. Satz: Sei $b: V \times W \rightarrow K$ eine Bilinearform. Dann
 induziert b Homomorphismen
 $b_1: V \rightarrow W^* = \text{Hom}(W, K), x \mapsto b(x, -): y \mapsto b(x, y)$
 $b_2: W \rightarrow V^*, y \mapsto b(-, y): x \mapsto b(x, y)$
 b ist nicht ausgeartet in der ersten Variablen genau dann,
 wenn b_1 injektiv ist, nicht ausgeartet in der zweiten
 Variablen genau dann, wenn b_2 injektiv ist.

Beweis: $b(x, y) = 0 \quad \forall y \in W$ bedeutet: $b_1(x) = b(x, -) = 0 \in W^*$
 Also b_1 injektiv $\Leftrightarrow b$ nicht ausgeartet im 1. Argument.

9.4. Definition: Sei $b: V \times W \rightarrow K$ eine Bilinearform. Dann definieren
 wir für $X \subset V$ ein Untervektorraum:
 $X^\perp = \{w \in W \mid b(x, w) = 0 \quad \forall x \in X\} \subset W$
 und für $Y \subset W$ ein UVR:
 ${}^\perp Y = \{v \in V \mid b(v, y) = 0 \quad \forall y \in Y\} \subset V$
 $X^\perp \subset W$ ${}^\perp Y \subset V$ sind UVR und $(X^\perp)^\perp \supset X$
 und $({}^\perp Y)^\perp \supset Y$

Bemerkung: Offenbar gilt $b: V \times W \rightarrow K$ nicht ausgeartet
 im 1. Argument genau dann, wenn $X^\perp = 0$.

9.5. Satz: Seien $V \times W \rightarrow K$ eine Bilinearform zwischen
 endlich-dimensionalen K -VR gleicher Dimension
 $\dim V = \dim W = n$, und $B = (b(v_i, w_j)) \in K^{n \times n}$
 die Strukturmatrix bzgl. geordneter Basen. Dann sind
 äquivalent:
 (i) b ist nicht ausgeartet in der 1. Variablen
 (ii) $B \in K^{n \times n}$ ist invertierbar
 (iii) b ist nicht ausgeartet in der 2. Variablen

(iv) $\dim X^\perp = \dim V - \dim X$ für UVR $X \subset V$.

(v) $\dim Y = \dim W - \dim Y$ für UVR $Y \subset W$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (iv): b nicht ausgeartet im ersten Argument

$\Rightarrow b_1: V \rightarrow W^*$ ist injektiv (wegen $\dim W^* = \dim W$)

$\Rightarrow$ Für $X = \langle x_1, \dots, x_k \rangle \subset V$ eine k -dimensionale UVR sind die Linearformen $b_1(x_1), \dots, b_k(x_k)$ linear unabhängig.

$\Rightarrow X^\perp = \ker(W \xrightarrow{b} K^k) \subset W$

mit $f(w) = (b(x_1, w), \dots, b(x_k, w))$ hat Kodimension k .

Also: $\dim X^\perp = \dim W - k = \dim W - \dim X$
 $= \dim V - \dim X$

(iv) $\Rightarrow$ (ii) $\dim V^\perp = \dim V - \dim V = 0$ besagt, dass

$b_1(v_1), \dots, b_k(v_m) \in W^*$ keinen gemeinsamen Kern

haben, also die lineare Abbildung $W \rightarrow K^k$

$w \mapsto (b_1(w), \dots, b_k(w))$ ist injektiv.

Bzgl. einer Basis $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ von W ist diese Abbildung durch die Matrix

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\quad} & K^k \\ B \uparrow & & \nearrow B \\ K^m & & \end{array}$$

gegeben.

Also: $\text{rang } B = m$

$\Leftrightarrow B$ ist invertierbar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist $v \in V$ mit $b(v, y) = 0 \forall y \in V$ so existieren

$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K^m$ ($v = \sum \lambda_i v_i$)

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \begin{pmatrix} b(v_1, w_1) & \dots & b(v_1, w_m) \\ \vdots & & \vdots \\ b(v_m, w_1) & \dots & b(v_m, w_m) \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1, \dots, \lambda_m) B = 0$$

Da B invertierbar ist, ist dies nur der Nullvektor.

Die restlichen Äquivalenzen gelten analog. $\square$

Definition: Eine Bilinearform $V \times W \rightarrow K$ mit $\dim V = \dim W < \infty$ heißt nicht ausgeartet, wenn die Äquivalenzbedingungen des Satzes erfüllt sind.

Beispiele: $V = K^m$

$$K^m \times K^m \xrightarrow{1 \leq k \leq m-1} K^m \times K^m \xrightarrow{\quad} K^m \times K^m \cong K^m$$

ist eine nicht ausgeartete Bilinearform.

Beweis: Übungen!

9.6. Satz + Definition: Sei $V, W \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete Bilinearform. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung $f^{\text{ad}}: W \rightarrow W$, sodass $b(f(v), w) \in b(v, f^{\text{ad}}(w))$. Man nennt f^{ad} die adjungierte zu f .

Beweis: b nicht ausgeartet $\Rightarrow b_1: V \rightarrow W^*$ ist ein Isomorphismus.
Also $f: V \rightarrow V$ induziert eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \cong \downarrow b_1 & & \cong \downarrow b_1 \\ W^* & \xrightarrow{f^{\text{ad}}} & W^* \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{mit } W \xleftarrow{f^{\text{ad}}} W \text{ die zugehörige Abbildung} \\ b(f(v), w) = (b_1(f(v)))(w) \\ = (b_1^{\text{ad}}(b_1(v)))(w) = b(v, f^{\text{ad}}(w)) \quad \square \end{array}$$

9.7. Definition: Ist $V = W$ so macht es Sinn von symmetrischen Bilinearformen zu sprechen: Eine Bilinearform $b: V \times V \rightarrow K$ heißt symmetrisch, wenn $b(v, w) = b(w, v) \quad \forall v, w \in V$.
 b heißt schief-symmetrisch, wenn $b(v, w) = -b(w, v)$, falls $2 \neq 0 \in K$, ist jede Bilinearform eine Summe einer symmetrischen und schief-symmetrischen Bilinearformen.

$$b^+(v, w) = \frac{1}{2}(b(v, w) + b(w, v))$$

$$b^-(v, w) = \frac{1}{2}(b(v, w) - b(w, v))$$

$$\text{wobei } b = b^+ + b^-$$

Übung: $b: V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform, für die $b(v, w) = 0 \Leftrightarrow b(w, v) = 0 \Rightarrow b$ ist symmetrisch oder schief-symmetrisch.

9.8. Satz: $2 \neq 0 \in K$ und $V \times V \rightarrow K$ schief-symmetrisch, nicht ausgeartete Bilinearformen, dann ist $\dim V = 2b = n$ gerade und es existiert eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V der die Strukturmatrix die Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ hat.

Beweis: Sei $x \in V$ ein Vektor $\neq 0$. Da b nicht ausgeartet ist $\exists y \in K$ mit $b(x, y) = 1$. Aber: $1 = b(x, x) = b(x, x) + b(x, x) = 0$. Da $2 \neq 0 \in K$ ist $y \notin \langle x \rangle$.
 $\Rightarrow \langle x, y \rangle$ ist zweidimensional.

$\Rightarrow V$ mindestens zweidimensional.

$$V = \langle x, y \rangle \oplus W \quad \text{mit } W = \langle x, y \rangle^\perp$$

$b|_{W \times W}: W \times W \rightarrow K$ ist nicht ausgeartet, $\dim W < \dim V$, also Induktion nach $\dim V$.

⇒ W besitzt Basis $x_2, x_2, \dots, x_{k-1}, y_{k-1}$

Bege der die Skalarprodukt die angegeben wurde hat.
dann 2: $V = \langle x, y \rangle$ $b(x, y) = -b(y, x)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
 $b(x, x) = 0 = b(y, y)$

Man nennt (V, b) symplektischen Raum.

3.9. Definition: Sei V ein K -VR endlicher Dimension

Eine quadratische Form auf V ist eine Abbildung

$q: V \rightarrow K$, die 1) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$

2) $q(x+y) = q(x) + q(y) + b(x, y)$ erfüllt

Beispiel: 1) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ definiert die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^3$.

2) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ definiert die Minkowski-Metrik auf $\mathbb{R}^4$ der speziellen Relativitätstheorie.

3) Allgemein für $q(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$ ein homogenes quadratisches Polynom ist $q: K^n \rightarrow K$ eine quadratische Form.

Bemerkung: Ist $2 \neq 0 \in K$, dann lässt sich q aus $b(x, y)$
 $= q(x+y) - q(x) - q(y)$ zurückgewinnen.

$$b(x, x) = q(2x) - 2q(x) = 2q(x)$$

Wir setzen daher im Folgenden ohne $K \neq 2$ voraus und bezeichnen mit $q(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y)$.

3.10. Satz: Sei q quadratische Form auf V . Dann existiert eine Basis $v_1, \dots, v_n \in V$ von paarweise orthogonalen Vektoren: $b(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$.

Beweis: Ist $q=0$, dann hat jede Basis diese Eigenschaft.

Sonst $a_1 = q(v_1) \neq 0$ Wir betrachten $W = v_1 \perp$
dann $W \cong \dim V - 1$

glw hat nach Induktionsvoraussetzung eine Orthogonalbasis $v_2, \dots, v_n$ und $V = \langle v_1 \rangle \oplus W$ die Orthogonalbasis

$$v_1, \dots, v_n \quad q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$$

Bege dieser Basis wird q durch $q(x)$ dargestellt. $\square$

§. 11. Definition: 1) K^m mit der quadratischen Form
 $q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_m x_m^2$ bezeichnen wir

$$[a_1, \dots, a_m]$$

2) Zwei quadratische Räume $(V, q), (V', q')$
 heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus
 $f: V \rightarrow V'$ gibt,

so dass das Diagramm
 kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{q} & K \\ f \downarrow & & \searrow q' \\ V' & \xrightarrow{q'} & K \end{array}$$

Bemerkung: Verschiedene Tupel $a_1, \dots, a_m \in K$ und
 $b_1, \dots, b_m \in K$ können durchaus isomorphe
 quadratische Funktionen beschreiben.

$$[a_1, \dots, a_m] \cong [b_1, \dots, b_m]$$

möglich, d.h. $\exists S \in GL(m, K)$ mit

$${}^t S (a_1 \dots a_m) S = (b_1 \dots b_m)$$

Auf die Reihenfolge der $a_1, \dots, a_m$ kommt es nicht an,
 und auf quadratische Funktionen auch nicht.

$$[a_1] \cong [x^2 a_1], \quad x^2 \in K^*$$

ermöglicht $x_1 \mapsto \lambda x_1$.

§. 12. Satz: (Kürzungsatz von Witt)

~~Sei~~ $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in K^*$.

Aus $[a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m] \cong [b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n]$
 und $[a_1, \dots, a_k] \cong [b_1, \dots, b_k]$ folgt:

$$[a_{k+1}, \dots, a_m] \cong [b_{k+1}, \dots, b_n]$$

Beweis: 2): $[a_1, \dots, a_k] \cong [b_1, \dots, b_k]$

$$\Rightarrow [a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n] \cong [b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n]$$

$$\cong [a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m]$$

Wir können also annehmen, dass $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$
 Induktion nach k reduziert die Behauptung auf den
 Induktionsanfang $k=1$.

$$[a_1, a_2, \dots, a_m] \cong [a_1, b_2, \dots, b_n]$$

$$\cong [a_2, \dots, a_m] \cong [b_2, \dots, b_n] \text{ ist zu zeigen.}$$

Unsere Voraussetzung liefert, dass $\exists T \in GL(m, K)$ mit

$${}^t T \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & a_m \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & b_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} c & t_{11} \\ & \sqrt{S} \end{pmatrix}$$

Also: 1) ${}^t u A u + c A c = a_1$

2) ${}^t S A S + a_1 {}^t u = B$

3) ${}^t S A S + a_1 c v = 0$

Gesucht: $\exists M \in GL(m, K)$ mit ${}^t M A M = B$

Ansatz: $M = S + \lambda {}^t u v$, $\lambda \in K$

Wir erhalten: ${}^t M A M = {}^t S A S + \lambda [{}^t S A {}^t u v u A S] + \lambda^2 v {}^t u A u v = B$

$B = B - a_1 v {}^t u + \lambda [-a_1 v {}^t u] \cdot 2 + \lambda^2 (a_1 (1 - c^2)) v {}^t u$

ist erfüllt, wenn $(1 + \lambda c)^2 = \lambda^2$

Das hat immer eine Lösung λ , sodass wir so am M

zurück kommen. $M \in GL(m, K)$ folgt, da A, B

invertierbar sind und somit

$(\det M)^2 \det A = \det B \neq 0 \quad \square$

9.13. Satz (Wittkreation)

Seien $a, b \in K^X$ mit $a + b \neq 0$. Dann ist

$[a, b] \cong [a+b, (a+b)ab]$

Beweis: Es sei $q = [a, b]$, also $q(x_1 e_1 + x_2 e_2) = ax_1^2 + bx_2^2$

Wir wählen jetzt als Basisvektor $v_1 = e_1 + e_2$ und ergänzen dies orthogonal:

$[a, b] \cong [a+b, t]$ für ein $t \in K^X$.

Dann $\exists \alpha \in K^X$ mit $(a+b)t = \alpha^2 ab$. $\alpha = \det M$

Es folgt: $t = c^2 (a+b) ab$ mit $c = \frac{\alpha}{a+b}$

Also die Multiplikation mit Quadraten (sogar quadratische Formen erzeugt) folgt:

$[a, b] \cong [a+b, t] \cong [a+b, (a+b)ab] \quad \square$

9.14. Satz (Legendrische Klassifikation von quadratischen Formen)

Es seien $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in K^X$, dann gilt:

$[a_1, \dots, a_m] \cong [b_1, \dots, b_m]$ genau dann, wenn

$[a_1, \dots, a_m]$ in $[b_1, \dots, b_m]$ durch wiederholtes Anwenden folgender elementarer Operationen übergeht:

(i) Vertauschen zweier Koeffizienten c_i, c_j in $[c_1, \dots, c_m]$

(ii) Multiplikation eines Koeffizienten mit einem Quadrat

(iii) Ersetzen von (c_1, c_2) in $[c_1, c_2, \dots, c_m]$ durch $(c_1 + c_2, (c_1 + c_2)c_1 c_2)$.

Beweis: Da $b_1 = q(v_1)$ für einen Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, dann hat die Gleichung $b_1 = a_1 x_1^2 + \dots + a_m x_m^2$ eine Lösung. Vertauschen der Summanden, Ersetzen von a_i durch $a_i x_i^2$ gegen (i), (ii) liefert $b_m = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_m x_m^2$ für ein $1 \leq m \leq n$. Regel (iii) angewendet liefert

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, \dots, a_m] &\cong [a_1 + a_2, *, a_3, \dots] \\ &\cong [a_1 + a_2, a_3, \dots, a_m, *] \\ &\cong [a_1 + a_2 + a_3, a_4, \dots, a_m, *, *] \\ &\cong [b_1, a_2, \dots, a_m] \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung: $[b_1, \dots, b_m] \in [a_1, \dots, a_m]$

$$\cong [b_1, a_2, \dots, a_m]$$

Die Witt-Kürzungsregel greift:

$$[b_2, \dots, b_m] \cong [a_2, \dots, a_m]$$

Induktion nach m liefert sich diese Isomorphie mit den Regeln (i) - (iii) erreichen. $\square$

Die algorithmische Klassifikation ist nur ein Anfang zur Lösung des Klassifikationsproblems. Die endgültige Antwort hängt von den arithmetischen Eigenschaften des Körpers K ab und führt weit über die lineare Algebra hinaus.

9.15. Definition: 1) Die quadratische Form auf $V = K^2$ mit Strukturmatrix ~~$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$~~ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nennt man eine hyperbolische Ebene.

2) Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$ heißt isotrop

Bzgl. $q: V \rightarrow K$, wenn $q(v) = 0$

3) Ein Unterraum $U \subset V$ heißt isotrop, wenn

$$q|_U \equiv 0$$

4) (V, q) heißt anisotrop, wenn V keinen isotropen Vektor $\neq 0$ enthält.

9.16. Satz: Sei (V, q) ein nichtausgearteter quadratischer Raum, der einen von Null verschiedenen isotropen Vektor u enthält. Dann enthält V eine hyperbolische Ebene $H = \langle u, w \rangle$ und $V = H \oplus W$, wobei $W = H^\perp$

Beweis: Nach Voraussetzung enthält V einen Vektor w mit $q(u, w) \neq 0$. Die Einschränkung können wir annehmen: $q(v, w) = 1$. Die Ebene $\langle u, w \rangle$ enthält einen weiteren isotropen Vektor.

$w + \lambda u$, $\lambda \in K$ ist isotrop
 $\Leftrightarrow q(w + \lambda u, w + \lambda u) = q(w, w) + 2\lambda q(w, u) + \lambda^2 q(u, u)$
 $= q(w, w) + 2\lambda = 0$

Wegen $2 \neq 0 \in K$ hat diese Gleichung $\lambda = -\frac{q(w)}{2}$ Lösung.
 Ersetzen wir durch $w + \lambda u$ wird sehen:

$$\begin{pmatrix} q(u, u) & q(u, w) \\ q(w, u) & q(w, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $H = \langle u, w \rangle$ mit
 $q|_H$ ist eine
 hyperbolische Ebene.

$W = H^\perp$ $H \cap W = 0$

$q(a + bw, u) = 0$ $q(a + bw, w) = 0$

Also: $\dim W = \dim V - 2 \Rightarrow V = H \oplus W$

Die Strukturmatrix von W bzgl. V in angepasster Basis:

$B = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \tilde{B} \end{array} \right)$ Da B nicht invertierbar $\Rightarrow \tilde{B}$ nicht invertierbar

Corollar: (V, q) nicht isotroper quadratischer Raum.

Dann ist $V \cong H \oplus \dots \oplus H \oplus W$ mit $(W, q|_W)$ isotrop.

Bemerkung: Der Name $iso = isotrop = gleich$

$trop = \tau \circ \rho \circ \tau =$ Drehung

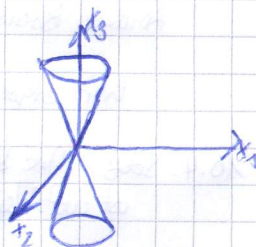
Hat folgenden Ursprung: Zunächst betrachte man die
 Kreispunkte $(1, \pm i, 0) \in P^2(\mathbb{C})$ als isotrop, da sie bei Drehungen
 und Transvektionen von $\mathbb{R}^2 \subset P^2(\mathbb{R}) \subset P^2(\mathbb{C})$ festgehalten werden.
 Der Vektor $(1, i, 0) \in \mathbb{C}^3$ ist isotrop bzgl. der quadratischen
 Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = q(x)$ in der euklidischen Geometrie
 $(\mathbb{R}^n, x_1^2 + \dots + x_n^2)$ heißt ein reeller isotroper Vektor.

In der Minkowski-Geometrie vom Raum-Zeit der speziellen
 Relativitätstheorie betrachtet man die quadratische Form:
 $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ im $\mathbb{R}^4$.

2+1 Minkowski-Geometrie $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

Kotrope Vektoren nennt man
 auch Lichtvektoren.

Vektoren innerhalb des Kegels
 heißen Zeitartig. Zeilen außerhalb
 raumartig. Nur Vektoren innerhalb des
 Lichtkegels können im Nullpunkt Ereignisse
 beeinflussen, nur Punkte innerhalb des ebenen Kegels
 werden von Ereignissen im Nullpunkt beeinflusst.



10) Die Grassmann - Mannigfaltigkeit

10.1 Definition: Sei $1 \leq k < n$, $V = K^n$

$$G(k, n) = \{ U \subset V \mid U \text{ ist } k\text{-dim UVR von } V \}$$

heißt Grassmannmannigfaltigkeit der k -dimensionalen UVR von K^n .

$$\text{Im Fall } k=1 \text{ ist } G(1, n) \cong P^{n-1} = P(K^n)$$

Ähnlich wie im Fall vom projektiven Raum wollen wir auf $G(k, n)$ zusätzliche Strukturen einführen.

(Karten, Koordinaten, usw.)

10.2. Sei $U = \langle a_1, \dots, a_k \rangle \subset V$ ein k -dim UVR.

wird $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von $V = K^n$, dann gilt

$$a_1, \dots, a_k = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} e_i \quad \det A_1 \quad e_i, \dots, e_n \in K^V$$

wobei $A = (a_{ij}) = (a_1, \dots, a_k) \in K^{n \times k}$ und A_1 die $k \times k$ Untermatrix von A mit Zeilen-Indizes

$$1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$$

10.3. Definition: Die Koeffizienten $(\det A_{I_1})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \in K^{\binom{n}{k}}$ heißen Plückerkoordinaten des

Unterraums $U = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$

$$\text{Die Abbildung } G(k, n) \longrightarrow P^{\binom{n}{k}-1} = P(K^{\binom{n}{k}})$$

$$\langle a_1, \dots, a_k \rangle \mapsto [a_1, \dots, a_k]$$

heißt Plücker-Einbettung der Grassmannschen.

Beispiel: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$ hat Plückerkoordinaten:

$$\begin{matrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ (-4) & (-8) & (-4) & (-12) & (-8) & (-4) \end{matrix}$$

$$\text{Andere Basis: } U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (-1, -2, -1, -3, -2, -1)$$

Wir erhalten den selben Vektor bis auf Faktor 4.

10.4. Satz: Die Abbildung $G(k, n) \longrightarrow P^{\binom{n}{k}-1} \cong P^{\binom{n}{k}-1}$ ist wohldefiniert und injektiv.

Beweis: Sei $\langle b_1, \dots, b_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ eine ordnung Basis.

$B = (b_1, \dots, b_n)$, $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{n \times n}$ die
Vektorraummatrizen. Dann existiert ein $S \in GL(n, K)$
Solches $B = AS$.

$i = 1, \dots, n \Rightarrow B_i = A_i \cdot S \Rightarrow \det B_i = \det A_i \cdot \det S$
Die Vektoren $(\det B_i)_{i=1, \dots, n}$ und $(\det A_i)_{i=1, \dots, n} \in K^{(n)}$
unterscheiden sich also nur durch den skalaren Faktor
 $\det S$. Also repräsentieren den gleichen Punkt in $P(K^{(n)})$.
Dies zeigt, dass die Abbildung wohldefiniert ist. um die
Injektivität zu zeigen benutzt ein Hilfsatz:

10.5. Satz: Sei $u \in N^k V$ und $a \in V$, $a \neq 0$
 u hat die Gestalt $u = a \wedge w$ mit $w \in N^{k-1} V$
genau dann, wenn $a \in \ker(V \rightarrow N^{k+1} V)$

Beweis: $a \in \ker(V \rightarrow N^{k+1} V)$ ist klar, da $a \wedge a = 0$.

Dies zeigt eine Richtung. Für die andere Richtung
ergänzen wir a zu einer Basis $a = a_1, a_2, \dots, a_n$ von $V = K^n$
Bzgl. dieser Basis hat u die Gestalt

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_1 \wedge \dots \wedge a_i$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n \lambda_i a_1 \wedge a_i \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n \lambda_i a_1 \wedge \dots \wedge a_i$$

$$a \wedge u = a_1 \wedge u = 0 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n \lambda_i a_1 \wedge a_i \wedge \dots \wedge a_i$$

Teil einer Basis von $N^{k+1} V$

Also: $a \wedge u = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 2, \dots, n$ mit $i \neq 1$.

$$\Rightarrow u = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_1 \wedge a_i \wedge \dots \wedge a_i + 0$$

$$= a_1 \wedge \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \wedge \dots \wedge a_i = a_1 \wedge w \in N^{k+1} V \quad \square$$

Es folgt $[u] \in P(N^k V)$ liegt im Bild von der Projektionsabbildung
genau dann, wenn $\dim \ker(V \xrightarrow{u} N^{k+1} V) = k$
und in dem Fall ist $U = \ker(u \rightarrow N^{k+1} V)$ der
zugehörige Unterraum.

Dies zeigt die Injektivität von $G(K^n) \rightarrow P(N^k V)$

Bemerkung: Man nennt Vektoren $u \in N^k V$ der Gestalt
 $u = u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ vollständig zerlegbar. Die vollständig
zerlegbaren Vektoren sind also die Plückerkoordinaten
vom Unterraum.

Wird jeder Vektor vollständig zerlegbar?

10.6. Satz: Jeder Vektor $u \in \Lambda^{m-1}V$, ($V = K^n$)
ist vollständig zerlegbar.

Beweis: Die Abbildung $V \rightarrow \Lambda^m V \cong K$ hat einen
wenigstens $(m-1)$ -dimensionalen Kern und gleichzeitig gilt,
wenn $u \neq 0$, da $u \in \Lambda^{m-1}V$ müßte m lineare Faktoren haben
kann. Bis auf Skalar

$$u = \lambda u_1 \wedge \dots \wedge u_{m-1} \quad \text{wobei } \langle u_1, \dots, u_{m-1} \rangle = \ker(V \rightarrow \Lambda^m V)$$

Nicht alle Vektoren in $\Lambda^k V$ für $2 \leq k \leq m-2$ sind vollständig
zerlegbar, Beispiel:

$$\begin{aligned} n=4, \quad k=2, \quad V=K^4 \quad \text{wobei} \quad e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 = u \\ V \rightarrow \Lambda^3 V, \quad e_1 \mapsto e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \\ e_2 \mapsto e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \\ e_3 \mapsto e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \\ e_4 \mapsto e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \end{aligned}$$

Wir bilden die Basis von $V \cong K^4$ auf die Standardbasis
von $\Lambda^3 V$ ab, ist also ein Isomorphismus.

$$\Rightarrow \ker(V \rightarrow \Lambda^3 V) = 0$$