4.31. Es sei $f \in K[x_1,\dots,x_n]$ und $X = V(f) = \{(a_1,\dots,a_n)\in K^n \mid f(a)=0\}$ die zugehörige affine Hyperfläche. (f hat Grad d)
X heißt affine Hyperfläche vom Grad d.
Ist $L = \{(a_1,\dots,a_n)+t(b_1,\dots,b_n) \mid t\in K\} \subset K^n$ eine parametrisierte Gerade, dann gibt es für den Durchschnitt $X\cap L$ folgende Möglichkeiten:

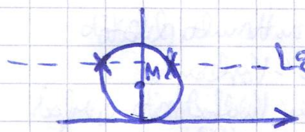
1) $X\cap L = L$ 2) $|X\cap L| < \infty$

In der Tat substituieren wir die Parametrisierung in die Gleichung $g(t) = f(a_1+tb_1,\dots,a_n+tb_n) \in K[t]$ und Schnittpunkte korrespondieren zu Nullstellen von g.
Ist $g = 0 \in K[t]$, dann ist jeder Punkt in L auch Punkt in X.
Andernfalls hat das Polynom Grad

$\deg(g) \le \deg(f) = d$ und es folgt genauer
$|X\cap L| \le d = \deg f$

Wie kann es passieren, dass $|X\cap L|<\infty$, aber $|X\cap L| < d$?
also $X\cap L$ weniger als d Punkte enthält?

1. Beispiel: $K=\mathbb{R}$ $X = V(x^2+y^2-2y)$ Kreis um MP(0|1)
$= x^2+(y-1)^2-1$ mit Radius 1.

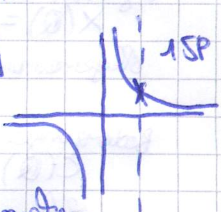


$L_0 = V(y) = \{(t,0)\mid t\in \mathbb{R}\}$ die x-Achse
Dann haben wir nur einen Schnittpunkt:
$f(t,0) = g(t) = t^2 \Rightarrow$ doppelte Nullstelle

Also $L_\varepsilon = \{(t,\varepsilon)\mid t\in \mathbb{R}\}$ $2>\varepsilon>0$

2. Beispiel: $X\cap L_{-1} = \emptyset \subset \mathbb{R}^2$
Einsetzen: $g(t) = f(t,-1) = t^2+(-2)^2-1$
$= t^2+3$
$0=g(t)$ hat nur komplexe Lösungen $t_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$.
Fazit: Es gibt die Schnittpunkte in $\mathbb{C}^2\setminus\mathbb{R}^2$.

3. Beispiel: $X = V(xy-1)$ $L = V(x-1) = \{(1,t)\}$
Einsetzen: $g(t) = t-1$
$\deg g = 1 < \deg f = 2$



Aber: Der zweite Schnittpunkt liegt projektiv gesehen auf der unendlich fernen Geraden $H \subset P^2(\mathbb{R})$

4.32. Definition: Seien $f, g \in K[x,y,z]$ zwei homogene Polynome vom Grad d bzw. e. Es sei $\overline{K} \supset K$ ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper. (z.B. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$)
Dann heißt $X = \{(x:y:z) \in \mathbb{P}^2(\overline{K}) \mid f(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^2(\overline{K})$ eine algebraische (projektive) Kurve vom Grad d definiert über K.
$X(K) = X \cap \mathbb{P}^n(K) \subset \mathbb{P}^n(\overline{K})$ heißt Menge der K-rationalen Punkte von X.

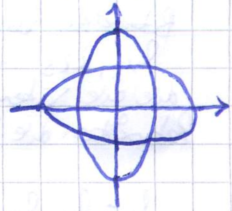
4.33. Satz: (Bézout) Es sei $\overline{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $C, D \subset \mathbb{P}^2(\overline{K})$ zwei ebene algebraische Kurven vom Grad d bzw. e. ($C = V(f)$, $D = V(g)$) Ist $|C \cap D| < \infty$ dann gilt: Mit Vielfachheit gezählt (und Punkte am Horizont berücksichtigt) haben wir genau $d \cdot e$ Schnittpunkte.
[Schnittmultiplizität $= i(f,g,p)$] $\sum_{p \in C \cap D} i(f,g,p) = de$

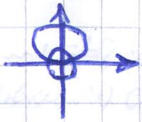
Enthält $C \cap D$ unendlich viele Punkte, dann haben f, g einen gemeinsamen Faktor in $\overline{K}[x,y,z]$ sowie C und D die gemeinsame Komponente $V(h)$

Beweis dieses Satzes und die Definition der Schnittmultiplizität ist Gegenstand der Algebraischen Geometrie I - Vorlesung.
Für $D = L$ eine Gerade ist die Definition der Vielfachheit einfach: Es ist die Multiplizität von $g(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ in der Nullstelle.

Bemerkung: 1) Der Satz von Bézout und andere sind der Grund warum man beim Studium von etwa $X(\mathbb{Q})$, $X = V(f)$, $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ zunächst $X(\mathbb{C})$ studiert.
Die Geometrie von $X(\mathbb{C})$ lässt sich algorithmisch einfach bestimmen. Die Topologie von $X(\mathbb{R})$ lässt sich aufwändiger ebenfalls algorithmisch bestimmen. (Quantorenelimination)
$X(\mathbb{Q}) = \emptyset$? Für diese Frage gibt es keinen allgemeinen Algorithmus
2) Faltings (!) hat gezeigt, dass unter milden Bedingungen an die komplexe Kurve $V(f) = C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ die Menge $C(\mathbb{Q})$ stets endlich ist.
z.B. $d = \deg f \geq 4$ und $\frac{\partial f}{\partial x} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ keine gemeinsame Lösung

Beispiele: 1) Betrachten die Ellipsen
$C = V(x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1)$, $D = V(\frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1)$
Wir sehen 4 Schnittpunkte
da $2 \cdot 2 = 4$ gibt es nach
Bézout in $P^2(\mathbb{C})$ keine weiteren
Schnittpunkte.





2) Betrachte: $C = V(x^2 + (y-1)^2 - 1)$
$D = V(x^2 + y^2 - r^2)$
schneiden sich nur in 2 Punkten.
Zwei Kreise schneiden sich höchstens in 2 Punkten in $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$
Aber $2 < 2 \cdot 2 = 4$

$$\left.\begin{matrix} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 \\ (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Homogenisieren}$$

$$(x - a_1 z)^2 + (y - b_1 z)^2 - r_1^2 z^2 = 0$$

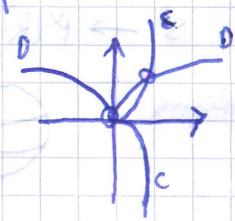
Am Horizont erhalten wir $z = 0$, $x^2 + y^2 = 0$
$x^2 + y^2$ hängt von dem spezifischen Kreis ab. Schnittpunkte am Horizont sind die sogenannten Kreispunkte $(1 : \pm i : 0) \in P^2(\mathbb{C})$

Folgerung: Durch drei Punkte $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ geht stets ein Kreis außer die drei Punkte liegen auf einer Geraden.

3) $V(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1) = C$
$D = V(x^2 + y^2 - 1)$

Schnittmultiplizitäten sollte 2 sein.
$2 + 2 = 2 \cdot 2$ keine weiteren Schnittpunkte

4) $C = V(y^2 - x^3)$
$D = V(x^2 - y^3)$



Augenscheinliche Schnittpunkte
$p = (1,1)$, $q(0,1)$
$9 = 3 \cdot 3 \Rightarrow 9$ Schnittpunkte
$i(f, g, 0) = 4$
$9 - 4 - 1 = 4$ SP fehlen.
$y^2 = x^3$ $x^2 = y^3$
$\Rightarrow y^4 = x^6 = y^9$
$\Rightarrow y^4(1 - y^5) = 0$ $\Rightarrow y^5 = 1$
$\Rightarrow y = 1$ oder $\zeta^k = y$ wobei $k = 1, \dots, 4$ und
$\Rightarrow$ 4 komplexe SP (ζ^3, ζ^{-2}) $k = 1, .., 4$ | $\zeta = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$

Am Horizont:
$zy^2 - x^3 = 0$ $zx^2 - y^3 = 0$ $z = 0$
$\Rightarrow z = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow y^3 = 0$
kein Schnittpunkt.

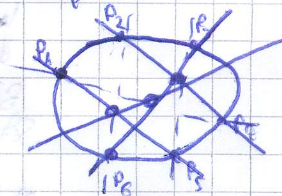
4.34. Beweis Pascals Theorem mit Bézout

Es seien $p_1, \dots, p_6$ Punkte auf einer Konik $C = V(q) \subset P^2$

Betrachte lineare Polynome

$l_{12}, l_{23}, \dots, l_{61} \in K[x,y,z]$

die die Seiten des 6-Ecks definieren.



Betrachten die kubischen Polynome

$$f_\lambda = l_{12}\, l_{34}\, l_{56} - \lambda\, l_{23}\, l_{45}\, l_{61}$$

Die Kurve $f_\lambda = 0$ enthält alle 9 Punkte.

Wählen $p_7 \in C$ einen weiteren Punkt $\neq p_1, \dots, p_6$ (Skizze Satz von Pappus wiederholen)

Wähle jetzt λ so, dass auch $p_7 \in V(f_\lambda)$ gilt, also:

$$\lambda = \frac{l_{12}(p_7) \cdot l_{34}(p_7)\, l_{56}(p_7)}{l_{23}(p_7)\, l_{45}(p_7)\, l_{61}(p_7)} \quad \text{(wohldefiniert)}$$

Dann hat C mit $V(f_\lambda)$ sieben Punkte gemeinsam.

Da $7 > 2 \cdot 3$ folgt C und $V(f_\lambda)$ haben eine gemeinsame Komponente nach Bézout. Also:

$f_\lambda = q\, l$ Die Gerade $L = V(l)$ enthält die drei Schnittpunkte, da diese in $V(f_\lambda) \setminus V(q)$ liegen.

Umgekehrt wählt man p_7 als ein 4-ten Punkt auf der Geraden durch $\overline{p_1 p_2} \cap \overline{p_4 p_5}$, die 3 Schnittpunkte und bekommen $f_\lambda = l q$ und $p_1, \dots, p_6 \in V(q)$.

4.35. $P^2(R)$ als reelle Fläche:

$S^2 \subset R^3 \setminus \{0\} \to P^2(R)$ $\quad S^2 = \{x \in R^3 \mid \|x\|^2 = 1\}$ Sphäre

$S^2 \to P^2(R) = S^2/\pm 1$

Zerlegung:

Kappe
Gürtel
Kappe

Nordkappe
$\cong$ Südkappe
$\cong$ Kreisscheibe

Es ergibt sich ein Möbiusband. Kreisscheibe + Möbiusband werden verklebt.