

Vorlesungen zur multivariaten Algebra:
 Im vergangenen Semester sind bei der Jordan'schen Normalform
 hatten wir gesehen, dass bei geschickter Basiswahl lineare
 Abbildungen einfachen Matrixdarstellungen folgen.
 Betrachtet man viele Vektorräume gleichzeitig (z.B. Physik)
 so ist eine gute gleichzeitige Basiswahl im Allgemeinen
 nicht möglich.

Beispiel: $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|^2 = 1\}$

$T_p S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot p \perp p\}$ ist ein Vektorraum mit Nullpunkt
 p (Tangentenraum)

$\bigcup_{p \in S^2} T_p S^2 = S^2 \times \mathbb{R}^3$



Frage: Können wir in allen Vektorräumen gleichzeitig eine Basis
 wählen $v_1(p), v_2(p) \in T_p S^2$ wählen sodass $v_i(p) \in \mathbb{R}^3$ stetig,
 von p abhängt?

Es reicht $p \mapsto v_1(p) \in T_p S^2$ zu finden, dann $v_2(p) = p \times v_1(p)$

Antwort: Nein! (algebraische Topologie)

Satz von Igel: Jedes stetige Vektorfeld auf der Sphäre S^2 hat
 einen Nullvektor.

Korrek: Für Konstruktionen von neuen Vektorräumen aus alten
 sollte man besser keine Basen verwenden.

Beispiel: $V, W \rightsquigarrow \text{Hom}(V, W)$
 $\cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^{n \times m}$

Bei der abstrakteren Version sehen wir ähnlich die Operation von
 $\text{End}(V)$ und $\text{End}(W)$, $\text{GL}(V)$, $\text{GL}(W)$

Die Definition des Tensorproduktes werden wir abstrakt durchführen.

~~Standardfall~~: Da wir keine Basen verwenden, funktioniert
 die Konstruktion auch über Ringen und Modulen.



Beispiel: $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$R = \{ \text{stetige Funktionen auf der Sphäre} \}$

$M = \{ S^2 \rightarrow U(T_p M) \text{ stetige Vektorfelder} \}$

Wenn alles unklar ist, dürfen Sie überall den Ring als
 Körper ansetzen.

5) Direkte Summen und Produkte

5.1. Sei K ein kommutativer Ring mit 1 , I eine beliebige Indexmenge und V_i für $i \in I$ jeweils ein K -Modul $(V_i)_{i \in I}$ Familie von K -Modulen

Definition: Die direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} V_i = \{ (v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V_i \text{ und alle bis auf endlich viele } v_i = 0 \}$ ist durch $+$ definiert. Das direkte Produkt $\prod_{i \in I} V_i = \{ (v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V_i \}$ ist durch $\cdot$ definiert. Die K -Modulstruktur ist jeweils komponentenweise definiert. Was ist der wesentliche Unterschied zwischen diesen Modulen?

Daran betrachten wir die Inklusionen

$$\iota_i: V_i \rightarrow \bigoplus_{j \in I} V_j \quad \text{und die Projektionen}$$

$$\pi_i: \prod_{j \in I} V_j \rightarrow V_i, \quad \pi_i(v_j) = v_i$$

Dies sind jeweils K -Modulhomomorphismen

5.2. Satz: (Eigenschaften der direkten Summe)

Sei V_i mit $i \in I$ eine Familie von K -Modulen. Die direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} V_i$ hat folgende Eigenschaften:

Für jeden weiteren K -Modul W und jeder Familie von K -Modulhomomorphismen $\pi_i: V_i \rightarrow W$ gibt es genau ein K -Modulhomomorphismus $\exists! \exists: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$ sodass das Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} v_i & \xrightarrow{\iota_i} & \bigoplus_{j \in I} V_j \\ & \searrow \exists & \downarrow \exists! \exists \\ & & W \end{array}$$

5.3. Satz: (Universelle Eigenschaft des direkten Produkts)

Sei V_i mit $i \in I$ eine Familie von K -Modulen und W ein weiterer K -Modul. Zu jeder Familie

$\psi_i: W \rightarrow V_i$ existiert genau ein K -Modul-Hom.

$\psi: W \rightarrow \prod_{i \in I} V_i$, sodass alle Diagramme kommutieren

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\psi} & \prod_{i \in I} V_i \\ \psi_i \searrow & & \downarrow \pi_i \\ & & V_i \end{array}$$

Beweis von 5.2: Nach Definition von ϕ hat jedes Element

$v \in \bigoplus_{i \in I} V_i$ eine Darstellung

$$v = \sum_{i \in I} u_i(v_i) \quad \text{wobei } |I| \text{ endlich}$$

Wenn alle Diagramme kommutieren, dann muss

$$(*) \quad \phi(v) = \sum_{i \in I} \phi(u_i(v_i)) = \sum_{i \in I} \phi_i(v_i) \quad \text{gelten.}$$

Dies zeigt die Eindeutigkeit von ϕ . Für die Existenz können wir $(*)$ als Definition nehmen. $\phi(v) = \sum_{i \in I} \phi_i(v_i)$

Beweis von 5.3: Sei $w \in W$ beliebig. Wegen der Kommutativität aller Diagramme gilt $\psi(w) = (\psi_i(w))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i$ (**)

Dies zeigt die Eindeutigkeit und die Existenz, wenn wir ψ durch $(**)$ definieren.

Zu einem K -Modul V_i legende $V_i^* = \text{Hom}(V_i, K)$ wie gewohnt den dualen Modul:

5.4. Lemma: Sei $V_i, i \in I$ eine Familie von K -Modulen, dann gilt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\left[\bigoplus_{i \in I} V_i \right]^* \cong \prod_{i \in I} V_i^*$$

Beweis: Wir verwenden die universellen Eigenschaften:

Zu den Inklusionen

$u_i: V_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i$ gehört die dualen Abbildungen:

$$u_i^*: \left[\bigoplus_{i \in I} V_i \right]^* \rightarrow V_i^* \quad \text{mit } \lambda \mapsto u_i^*(\lambda) = \lambda u_i$$

Die universelle Eigenschaft des Produkts gibt also eine K -Modul-Homomorphismus $\psi: \left[\bigoplus_{i \in I} V_i \right]^* \rightarrow \prod_{i \in I} V_i^*$ sodass alle Diagramme kommutieren.

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow p_i \\ & \searrow u_i^* & \\ & & V_i^* \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen, dass ψ ein Isomorphismus ist.

* ψ injektiv: Sei $\lambda \in \left[\bigoplus_{i \in I} V_i \right]^*$. $\psi(\lambda) = 0 \Rightarrow 0 = (p_i \circ \psi)(\lambda)$

$$= u_i^*(\lambda) = \lambda \circ u_i$$

$$\Rightarrow (\lambda \circ u_i)(v_i) = 0 \quad \forall v_i \in V_i$$

wegen Kommutativität

$v \in \bigoplus_{i \in I} V_i$ beliebig

$$v = \sum_{i \in I} u_i(v_i)$$

$$\Rightarrow \lambda(v) = \lambda\left(\sum_{i \in I} u_i(v_i)\right)$$

$$= \sum_{i \in I} \lambda(u_i(v_i)) = 0$$

$$v \text{ beliebig} \Rightarrow \lambda = 0$$

• Ψ surjektiv: Sei $f \in \prod_{i \in I} V_i^*$. Dann ist $\rho(f) = f_i \in V_i^* \quad \forall i$
 Also haben wir eine Abbildungen ρ_i

$$\rho \in (\bigoplus V_i)^* \quad \begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\rho_i} & \bigoplus V_i \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \end{array} \Rightarrow \exists \bigoplus v_i \xrightarrow{\rho} K$$

Zeigen: $\Psi(\rho) = f$. Für die Differenz $\Psi(\rho) - f$ gilt
 $\rho_i(\Psi(\rho) - f) = \rho_i(\Psi(\rho)) - \rho_i(f)$
 $= \rho_i^*(\rho) - \rho_i = f \circ \rho_i - \rho_i = \rho_i - \rho_i = 0 \quad \square$

5.5. Bemerkung: Ist $V_i = V \quad \forall i \in I$, dann sind die Notationen
 $V^I = \prod_{i \in I} V$ und $V(I) = \bigoplus_{i \in I} V$ gleichbedeutend.

5.6. Definition: Ein einem Ring R heißt ein Modul M frei,
 wenn $M \cong \bigoplus_{i \in I} R = R^I$

Beispiele: 1) Jeder Modul (endlichdimensionale) über K Körper ist
 frei. $V \cong K^n$

2) Mit tieferliegenden Methoden der Mengenlehre kann
 man zeigen: Jeder K -Vektorraum V ist frei.
 $V \cong K^{(I)}$

3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist kein freier $\mathbb{Z}$ -Modul.

5.7. Satz: R beliebiger Ring, M beliebiger R -Modul, dann ist
 M ein Quotient eines freien Moduls:
 $M \cong R^{(I)}/N \quad U \subset R^{(I)}$

Beweis: Betrachten zu $m \in M$ die Abbildung

$f_m: R \rightarrow M, r \mapsto r \cdot m$
 $\Rightarrow \exists$ Abbildung $R^{(I)} \xrightarrow{f} M$ surjektiv
 Nehmen $U = \ker f$ und wenden
 Homomorphiesatz an.