Lineare Algebra I
Übungsblatt 1

Abgabetermin Freitag, den 23.04.10 vor der Vorlesung.

1. (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

   (b) Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $L_t \subset \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & t-1 \\ -1 & -1 & 1 \\ t & -2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K und $f \in \operatorname{End}(V)$ mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie:

   (a) Ist λ ein Eigenwert von f, dann ist $\lambda \in \{0, 1\}$.

   (b) $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Bild}(f) = V$

   (c) $f\,|_{\operatorname{Bild}(f)} = id_{\operatorname{Bild}(f)}$

   (d) Ist $\mathcal{B}' = (v_1, ..., v_r)$ eine Basis von $\operatorname{Ker}(f)$ und $\mathcal{B}'' = (w_1, ..., w_s)$ eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$, dann ist mit $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_r & 0 \\ 0 & 1_s \end{pmatrix}$$

   wobei 1_s die $s \times s$-Einheitsmatrix und 0_r die $r \times r$ Nullmatrix bezeichne.

3. Bestimmen Sie die Normalformen der folgenden Quadriken:

   (a)

$$Q_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + 2x_2 - 1 = 0 \right\}$$

   (b)

$$Q_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1x_3 + x_2^2 + x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \right\}$$

4. Ein endlicher Komplex von K-Vektorräumen ist eine Folge

$$F : 0 \xrightarrow{f^{-1}} F^0 \xrightarrow{f^0} F^1 \xrightarrow{f^1} ... \to F^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} F^n \xrightarrow{f^n} 0$$

   von K-Vektorraumhomomorphismen $f^k : F^k \to F^{k+1}$ zwischen Vektorräumen mit $\operatorname{Bild} f^{k-1} \subset \operatorname{Ker} f^k$. Die Homologie von F sind die Quotientenvektorräume

$$H^k(F) = \frac{\operatorname{Ker} f^k}{\operatorname{Bild} f^{k-1}}$$

   Zeigen Sie: Sind alle F^k endlichdimensional, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim F^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k(F)$$