Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Dr. Janko Boehm

Lineare Algebra II
Übungsblatt 10

Abgabetermin Freitag, den 25.06.2010 vor der Vorlesung.

1. Seien $f \in \operatorname{End}(V)$ und $g \in \operatorname{End}(W)$ nilpotente Endomorphismen.

   (a) Bestimmen Sie im Fall, dass die Jordanschen Normalformen von f und g nur einen Block haben, etwa
   $$J_f = J(0,n) \qquad J_g = J(0,m)$$
   die Jordansche Normalform von $f \otimes g$.

   (b) Behandeln Sie den allgemeinen Fall von nilpotenten Endomorphismen.

2. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix
   $$A = (a_1, ..., a_4) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   mit $a_i = \sum_{i=1}^{4} a_{ij} e_i \in V = \mathbb{Q}^4$, indem Sie
   $$a_1 \wedge ... \wedge a_4 = \det(A) \cdot e_1 \wedge ... \wedge e_4 \in \textstyle\bigwedge^4 V$$
   $a_1 \wedge a_2$, $(a_1 \wedge a_2) \wedge a_3$ und schließlich $(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3) \wedge a_4$ berechnen. Vergleichen Sie dies mit der Rechnung für die Entwicklung der Determinante nach den ersten beiden Spalten.

3. Sei $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraums V mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\bigwedge^k \varphi$.

4. Sei $V = \mathbb{R}^6$ und
   $$\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6$$
   Zeigen Sie: $\wedge$-Produkt mit ω bzw. $\omega \wedge \omega$ gibt Isomorphismen
   $$\textstyle\bigwedge^2 V \to \bigwedge^4 V,\ \alpha \mapsto \alpha \wedge \omega$$
   $$\textstyle\bigwedge^1 V \to \bigwedge^5 V,\ \beta \mapsto \beta \wedge \omega \wedge \omega$$