Lineare Algebra II
Übungsblatt 11

Abgabetermin Freitag, den 02.07.2010 vor der Vorlesung.

1. Sei $b : V \times V \to K$ eine nichtentartete Bilinearform auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V mit $2 \neq 0 \in K$. Ist für b senkrecht stehen symmetrisch, d.h. $b(v,w) = 0 \Leftrightarrow b(w,v) = 0$, dann ist b entweder symmetrisch oder schiefsymmetrisch.

2. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $e_1, ..., e_n$ und $0 < k < n$. Das $\wedge$-Produkt induziert eine bilineare Abbildung
$$\bigwedge^k V \times \bigwedge^{n-k} V \to \bigwedge^n V = K \cdot e_1 \wedge ... \wedge e_n \cong K$$
Zeigen Sie, dass diese Bilinearform nichtausgeartet ist.

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und e_1, e_2, e_3 eine orthonormale Basis bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts. Die nichtausgeartete Bilinearform
$$V \times \bigwedge^2 V \to \bigwedge^3 V = K \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \cong K$$
induziert einen Isomorphismus
$$\bigwedge^2 V \to V^*$$
und das Skalarprodukt einen Isomorphismus
$$V^* \cong V$$
Zeigen Sie: Die Komposition
$$\lambda_2 : V \times V \to \bigwedge^2 V \cong V^* \cong V$$
stimmt mit dem Kreuzprodukt
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$
überein.

4. Sei $b : V \times V \to K$ eine Bilinearform auf einem K-Vektorraum der Dimension n, welche bezüglich einer Basis die Strukturmatrix B hat. Zeigen Sie:

   (a) $\dim V^\perp = n - \operatorname{Rang} B = \dim {}^\perp V$.

   (b) Es gilt $\operatorname{Rang} B = m$ genau dann, wenn b eine Darstellung der Form
   $$b(x,y) = f_1(x)\, g_1(y) + ... + f_m(x)\, g_m(y)$$
   hat, wobei $f_1, ..., f_m \in V^*$ und $g_1, ..., g_m \in V^*$ jeweils Familien von linear unabhängigen Linearformen sind.