PROF. DR. FRANK-OLAF SCHREYER
DR. JANKO BOEHM

Lineare Algebra II
Übungsblatt 12

Abgabetermin Freitag, den 09.07.2010 vor der Vorlesung.

1. Sei $b : V \times V \to K$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum V. Zeigen Sie:

   (a) Zu jedem K-Endomorphismus f von V ist die Abbildung

   $$b(f(-), -) : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & K \\ (v, w) & \mapsto & b(f(v), w) \end{array}$$

   eine Bilinearform von V.

   (b) Zu jeder Bilinearform $c : V \times V \to K$ gibt es ein $f \in \operatorname{End} V$ mit

   $$c(v, w) = b(f(v), w) \ \ \forall v, w \in V$$

2. Betrachten Sie die quadratischen $\mathbb{Q}$-Vektorräume gegeben durch $[-2, 5]$ und $[2, -5]$. Zeigen Sie, dass diese beiden Räume isomorph sind.

3. Seien folgende Geraden im $\mathbb{R}^3$ gegeben

   $$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \quad L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$
   $$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \quad L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t+1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

   Bestimmen Sie alle Geraden $L \subset \mathbb{R}^3$, die alle 4 Geraden schneiden.

4. Sei $V = \mathbb{R}^4$ mit Standardbasis $e_1, ..., e_4$ und

   $$\alpha = e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 + e_3 \wedge e_4 \in \bigwedge^2 V$$

   (a) Zeigen Sie, dass α zerlegbar ist, d.h. dass es $v, w \in V$ gibt mit $\alpha = v \wedge w$:

   (b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\Phi_A^B(\tau)$ von

   $$\tau : \begin{array}{ccc} V & \to & \bigwedge^3 V \\ v & \mapsto & v \wedge \alpha \end{array}$$

   bezüglich der Basen $A = (e_1, ..., e_4)$ von V und

   $$B = (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,\ e_1 \wedge e_2 \wedge e_4,\ e_1 \wedge e_3 \wedge e_4,\ e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$$

   von $\bigwedge^3 V$.

   (c) Sei U das Urbild von $[\alpha] \in \mathbb{P}\left(\bigwedge^2 V\right)$ unter der Plückereinbettung

   $$p : \mathbb{G}(2, 4) \to \mathbb{P}\left(\bigwedge^2 V\right)$$

   Bestimmen Sie eine Basis des 2-dimensionalen Untervektorraums $U \subset V$ und eine Zerlegung $\alpha = v \wedge w$.