

Lineare Algebra II
Übungsblatt 14

Abgabetermin Freitag, den 23.07.2010 vor der Vorlesung zur Wiederholung und für Zusatzpunkte.

1. Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

den Limes

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} A^k$$

2. (a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix und $p \in \mathbb{C}[t]$. Zeigen Sie, dass

$$B = p(A)$$

diagonalisierbar ist.

- (b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$$

und

$$B = A^4 - A$$

Geben Sie ein $S \in \text{Gl}(4, \mathbb{C})$ an, sodass

$$S \cdot B \cdot S^{-1} = D$$

Diagonalgestalt hat.

3. Seien $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4) \in \mathbb{R}^2$ Punkte von denen keine 3 kollinear sind. Zeigen Sie, dass $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$ genau dann auf einem Kreis liegen, wenn

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

4. (a) Seien $f \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ und $g \in \text{Hom}(W_1, W_2)$ Homomorphismen zwischen endlichdimensionalen K -Vektorräumen mit $\text{Rang}(f) = r$ und $\text{Rang}(g) = s$. Welchen Rang hat $f \otimes g \in \text{Hom}(V_1 \otimes W_1, V_2 \otimes W_2)$?

- (b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 3} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 2}$$

Bestimmen Sie den Rang und den Kern von

$$A \otimes B \in \text{Hom}(\mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^3)$$

- (c) Bestimmen Sie $\bigwedge^2 V$ für den $\mathbb{Z}$ -Modul

$$V = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$$