Lineare Algebra II
Übungsblatt 2

Abgabetermin Freitag, den 30.04.2010 vor der Vorlesung.

0. **Zweiter Versuch, Blatt 1, Aufgabe 1:** Für diejenigen, die letztes Mal in der Aufgabe 1 nicht volle Punktzahl bekommen haben:

   Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen. Finden Sie alle Primzahlen p für die das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   über $\mathbb{F}_p$ lösbar ist. Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge.

1. Sei $\lambda \in K$ und

$$A = J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

   Stellen Sie eine Formel für die Einträge von A^k für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ auf und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

2. Betrachten Sie den Endormorphismus

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -13 & 8 & -1 \\ -4 & -2 & 6 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$$

   der genau die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ hat.

   (a) Bestimmen Sie die Zerlegung von $\mathbb{Q}^5$ in die Haupträume von A.

   (b) Welche Jordansche Normalform hat A?

3. Sei $A = J(\lambda, n)$ ein $n \times n$ Jordanblock zum Eigenwert $\lambda \in K$. Bestimmen Sie die invertierbaren Matrizen $S \in \mathrm{GL}(n, K)$, die mit A kommutieren, d.h. für die gilt

$$SA = AS.$$

4. Die Matrizen

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   sind nilpotent. Bestimmen Sie für $i = 1, 2$

   (a) die Jordansche Normalform J_i von N_i,

   (b) die Basiswechselmatrix $S_i \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$, die N_i in die Jordansche Normalform J_i bringt, d.h. mit $S_i N_i S_i^{-1} = J_i$.