Lineare Algebra II
Übungsblatt 4

Abgabetermin Freitag, den 14.05.2010 vor der Vorlesung.

1. Sei $p \in K[t]$ ein normiertes Polynom. Zeigen Sie:
   Für $f \in K[t]$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[t]$ mit

   (a) $f = q \cdot p + r$
   (b) $\deg(r) < \deg(p)$.

   Dabei habe das 0-Polynom den Grad $-\infty$.

2. Bestimmen Sie mit Hilfe von Maple für alle $t \in \mathbb{C}$ die Lösungsmenge L_t des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & -2+t & -2+t & 1-2t & -t \\ 5+t & 5+t & 5+t & 4+2t & 5+t \\ 2+t & 3 & 2+t & 2+t & 3 \\ t & 2-t & 1 & t & 1 \\ 2+t & 2+t & 3 & 3 & 2+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+t \\ -2 \\ -2+t \\ -2 \\ -t \end{pmatrix}$$

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ -8 & -12 & 22 & -15 & 6 \\ -2 & -3 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -6 & 4 & 0 \\ -4 & -7 & 13 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie mit Hilfe von Maple

   (a) das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$,
   (b) die Eigenwerte und Eigenräume von A,
   (c) die Haupträume von A,
   (d) die Jordansche Normalform von A,
   (e) das Minimalpolynom $p_A(t)$.

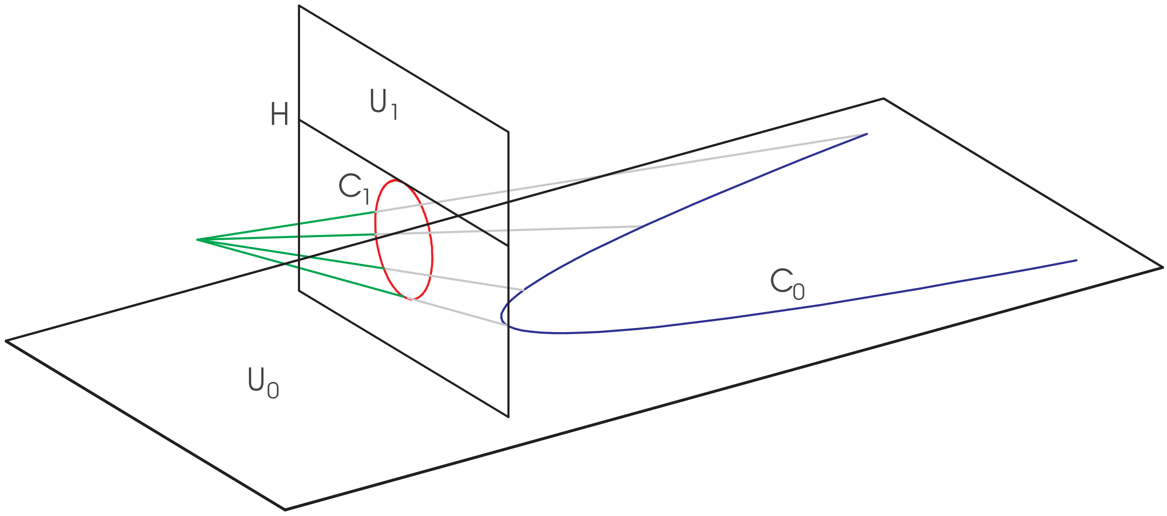
4. Betrachten Sie den reellen projektiven Raum $\mathbb{P}^2$ und in der Karte

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^2 \supset U_0 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_0 \neq 0\} & \stackrel{\varphi_0}{\to} & \mathbb{R}^2 \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = (z_1, z_2) \end{array}$$

   die Parabel

$$C_0 = \left\{(z_1, z_2) \mid 1 - \frac{1}{2}z_1 + z_2^2 = 0\right\} \hookrightarrow U_0$$

(a) Bestimmen Sie das Urbild C_1 von C_0 in der Karte $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$.



(b) Welcher Geradenschar in U_0 enspricht die Geradenschar durch den Berührpunkt von C_1 mit dem Horizont

$$H = \{(0 : 1 : t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset U_1 \ ?$$