Sommersemester 10 — Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer, Dr. Janko Boehm

Lineare Algebra II
Übungsblatt 5

Abgabetermin Freitag, den 21.05.2010 vor der Vorlesung.

1. Seien $P = (n_1, ..., n_k)$ und $Q = (m_1, ..., m_l)$ Partitionen von n. Wir definieren $P \geq Q$, wenn es eine von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ stetig abhängende Familie von nilpotenten Matrizen $A_t \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, sodass die Jordansche Normalform von A_0 die nilpotente Jordanmatrix

$$\begin{pmatrix} J(0,m_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(0,m_k) \end{pmatrix}$$

zur Partition Q ist, während alle Matrizen A_t mit $t \neq 0$ Jordansche Normalform zur Partition P haben. Durch $P \geq Q$ ist eine partielle Ordnung auf der Menge der Partitionen gegeben.

(a) Zeigen Sie: Im Fall $n = 4$ ist diese Ordnung gegeben durch

$$(4) > (3,1) > (2,2) > (2,1,1) > (1,1,1,1)$$

(b) Beschreiben Sie $\geq$ für die Fälle $n = 5, 6$.

Hinweis: Verwenden Sie folgende Tatsachen ohne sie zu beweisen:

1. Durch $\geq$ ist eine partielle Ordnung gegeben, d.h. insbesondere gilt: $P \geq Q$ und $Q \geq R$ impliziert $P \geq R$.
2. Folgende direkte Verallgemeinerung von Aufgabe 3, Blatt 4: Sei

$$A_t = \left(\begin{array}{c|c|c} & 0 & 0 \\ J(0,r) & & \\ \cline{2-3} & 0 & t \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{J(0,n-r)} \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

$r \geq n - r$. Dann haben alle Matrizen A_t für $t \neq 0$ die Jordansche Normalform

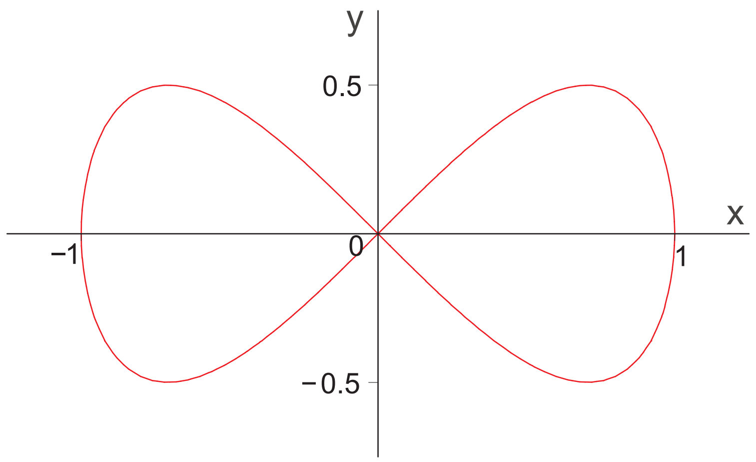
$$J = \begin{pmatrix} J(0,r+1) & 0 \\ 0 & J(0,n-r-1) \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt also $(r+1, n-r-1) > (r, n-r)$ als Partitionen von n.

2. In einem Geschäft, das täglich geöffnet ist, sollen immer genau 3 Mitarbeiter anwesend sein, und jeder soll genau 3 Tage pro Woche arbeiten. Weiter soll ein Kunde, der an zwei verschiedenen Tagen vorbeikommt, einen Mitarbeiter antreffen, der an beiden Tagen gearbeitet hat. Stellen Sie einen solchen Dienstplan auf.

3. Betrachten Sie die affine Kurve

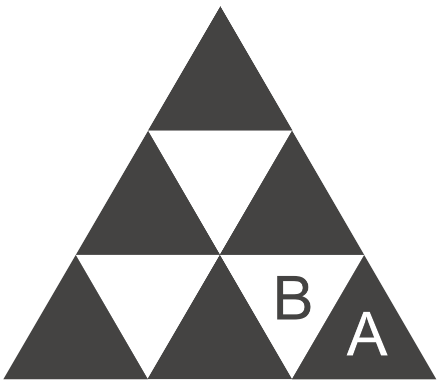
$$C_2 = \left\{y^2 = x^2 - x^4\right\} \subset \mathbb{R}^2 \cong U_2 = \{(x:y:1)\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$



Zeichnen Sie die Kurve in den Karten U_0 und U_1 und identifizieren Sie die Tangenten und Asymptoten in den verschiedenen Karten.

Hinweis: Sie dürfen die Maple-Funktion implicitplot des Pakets plots oder andere plot-Funktionen verwenden.

4. Gegeben sei ein mit gleichseitigen Dreiecken identischer Größe gefliester Fußboden:



Geben Sie ein Konstruktionsverfahren an, um folgende perspektivische Zeichnung des gefliesten Fußbodens zu vervollständigen. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens.