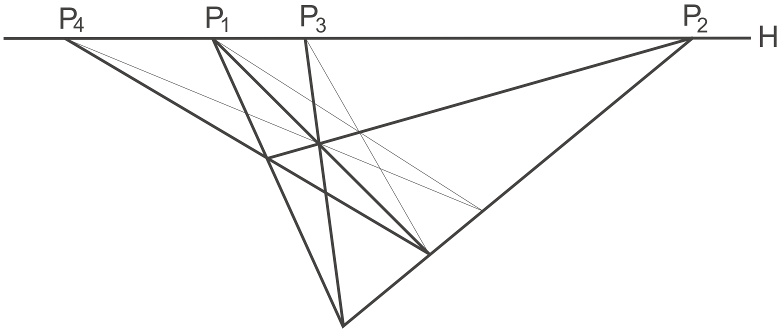
Lineare Algebra II
Übungsblatt 6

Abgabetermin Freitag, den 28.05.2010 vor der Vorlesung.

1. Betrachten Sie folgendes perspektivische Bild



Zeigen Sie, dass für das Doppelverhältnis der Punkte $P_1, ..., P_4 \in H$ gilt

$$DV\left(P_1, P_2, P_3, P_4\right) = -1$$

2. Zwei Geraden L, L' in $\mathbb{P}^2$ mit Punkten $p_1, p_2, p_3 \in L$ und $p_1', p_2', p_3' \in L'$ heißen zentralperspektivisch zueinander, wenn die drei Geraden $\overline{p_i p_i'}$, $i = 1, 2, 3$ sich in einem Punkt p schneiden.

   Sei $p_1'', p_2'', p_3'' \in L''$ ein weiteres Tupel, das zentralperspektivisch zu $p_1', p_2', p_3' \in L'$ ist. Ist dann stets $p_1, p_2, p_3 \in L$ zentralperspektivisch zu $p_1'', p_2'', p_3'' \in L''$?

3. Sei $Q = V\left(q\right) \subset \mathbb{P}^2\left(\mathbb{C}\right)$ eine ebene Quadrik von vollem Rang, d.h. gegeben durch ein homogenes quadratisches Polyom

$$q\left(x\right) = \left(\begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \end{array}\right) \cdot A \cdot \left(\begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\right)$$

   mit einer symmetrischen Matrix A von vollem Rang. Zeigen Sie:

   (a) Ist $p_0 \in Q$ ein Punkt und $L \subset \mathbb{P}^2\left(\mathbb{C}\right)$ eine Gerade, die p_0 nicht enthält, dann ist die Projektion von p auf L

$$\begin{array}{cccc} \pi: & Q & \rightarrow & L \\ & p & \mapsto & L \cap \overline{p\,p_0} \end{array}$$

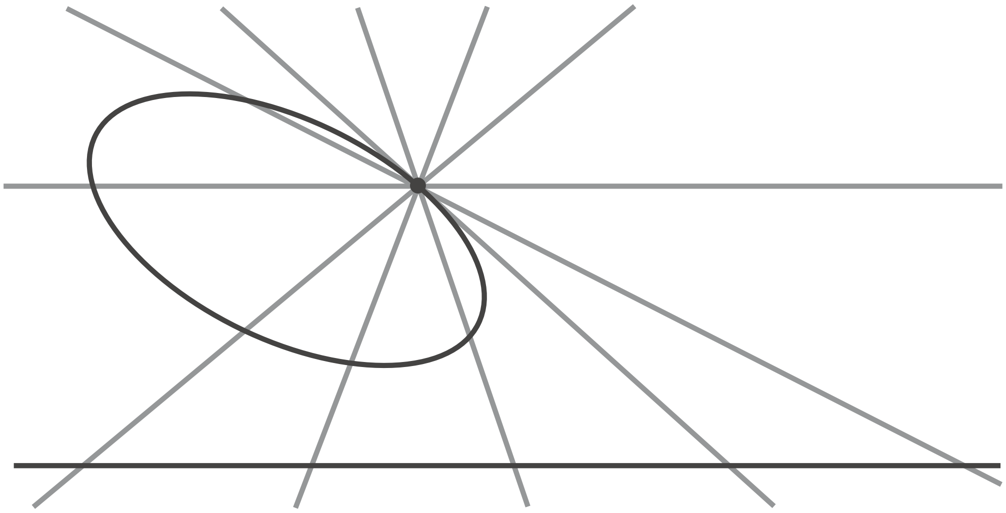
   (Durch welche Gerade muss man $\overline{p\,p_0}$ ersetzen für $p = p_0$?). Parametrisiert man L mit Hilfe von zwei verschiedenen Punkten $a = (a_0 : a_1 : a_2)$, $b = (b_0 : b_1 : b_2) \in L$

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right) & \rightarrow & L \\ & (s:t) & \mapsto & (sa_0 + tb_0 : sa_1 + tb_1 : sa_2 + tb_2) \end{array}$$

   dann liefert die Komposition eine Parametrisierung

$$\begin{array}{cccc} \psi = \pi^{-1} \circ \varphi: & \mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right) & \rightarrow & Q \\ & (s:t) & \mapsto & \left(f_0\left(s,t\right) : f_1\left(s,t\right) : f_2\left(s,t\right)\right) \end{array}$$

durch quadratische Polynome f_i.



(b) Welche Parametrisierung erhält man, wenn man

$$Q_0 = V\left(x_1^2 - x_0 x_2\right)$$

von dem Punkt $p_0 = (1:0:0)$ auf die Gerade

$$L = \{x_0 = 0\} = \left\{(0:s:t) \mid (s:t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right\}$$

projiziert.

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$f = L_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(A) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^6)$$

wobei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^6$ bezeichne.

(a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{A} = \{u_1, ..., u_r\}$ von dem Hauptraum $U = \mathrm{Hau}(A, 1)$ von A zum Eigenwert 1.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix

$$B = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f\,|_U)$$

von f eingeschränkt auf U bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.

Bemerkung: Sie dürfen Maple verwenden.