Lineare Algebra II
Übungsblatt 7

Abgabetermin Freitag, den 04.06.2010 vor der Vorlesung.

1. Der Satz von Bezout besagt:

   Mit Vielfachheit gezählt schneiden sich ebene projektive Kurven $C = V(f)$, $D = V(g) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, wobei $f, g \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogene Polynome vom Grad c und d ohne gemeinsamen Faktor sind, in genau $c \cdot d$ vielen Punkten.

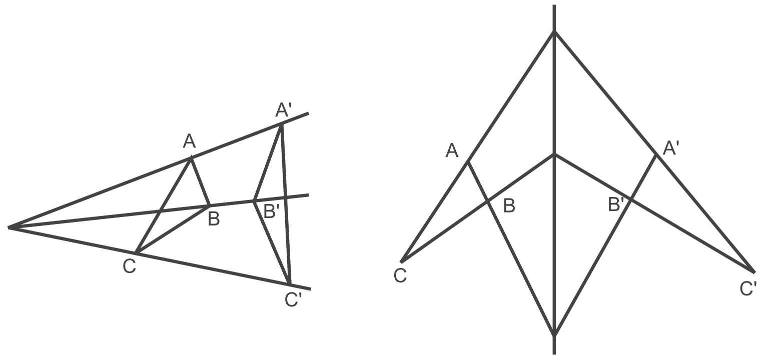
   Zeigen Sie diesen Satz in den Spezialfällen, dass D eine Gerade oder eine Quadrik von vollem Rang ist (d.h. $d = 1, 2$).

   Hinweis: Verwenden Sie für $d = 2$ Aufgabe 3 von Blatt 6.

2. Zeigen Sie den Satz von Desargues:

   Wir definieren:

   - Ein Dreieck $\triangle ABC$ in $\mathbb{P}^2$ ist gegeben durch drei paarweise verschiedene Punkte A, B, C und die paarweise verschiedenen Geraden AB, AC, BC.
   - $\triangle ABC$ heißt in Perspektive mit $\triangle A'B'C'$ vom Punkt P, wenn $\{P, A, A'\}$, $\{P, B, B'\}$ und $\{P, C, C'\}$ jeweils Mengen kollinearer Punkte sind, d.h. auf einer Geraden liegen.
   - $\triangle ABC$ heißt in Perspektive mit $\triangle A'B'C'$ von der Gerade L, wenn sich $\{L, AB, A'B'\}$, $\{L, AC, A'C'\}$ und $\{L, BC, B'C'\}$ jeweils in einem Punkt schneiden.



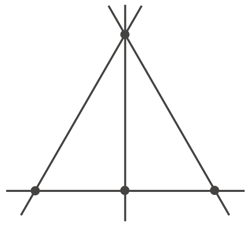
   Zeigen Sie (ohne Verwendung von Computeralgebra): Zwei Dreiecke sind in Perspektive von einem Punkt genau dann, wenn sie in Perspektive von einer Geraden sind.

3. Sei E eine Menge und $G \subset 2^E$. Die Elemente von E nennen wir Punkte, die Elemente von G Geraden. Ein Punkt P liegt auf einer Geraden g, wenn $P \in g$. Eine ebene projektive Inzidenzgeometrie ist gegeben durch die folgenden Axiome:

   1. Durch je zwei verschiedene Punkte P, Q gibt es genau eine Gerade g, d.h. $\forall P, Q \in E,\ P \neq Q\ \exists_1\ g \in G$ mit $P, Q \in G$.
   2. Je zwei verschiedene Geraden g, h schneiden sich in genau einem Punkt P, d.h. $\forall g, h \in G,\ g \neq h\ \exists_1\ P \in E$ mit $P \in g \cap h$.
   3. Es gibt drei Punkte die nicht auf einer Geraden liegen.
   4. Auf jeder Geraden liegen mindestens drei verschiedene Punkte.

   Zeigen Sie:

   (a) Folgende Konfiguration von Punkten und Geraden erfüllt die Axiome $1, 2, 3$ nicht jedoch 4:



(b) Je zwei Geraden enthalten gleich viele Punkte, d.h. zu je zwei Geraden g und h gibt es eine bijektive Abbildung $g \to h$.

(c) Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Geraden durch einen gegebenen Punkt und den Punkten einer Geraden.

(d) Liegen $n + 1$ Punkte auf jeder Geraden, dann hat E genau $n^2 + n + 1$ viele Punkte.

(e) Wählen wir als Punktmenge

$$E^\vee = G$$

und als Menge von Geraden

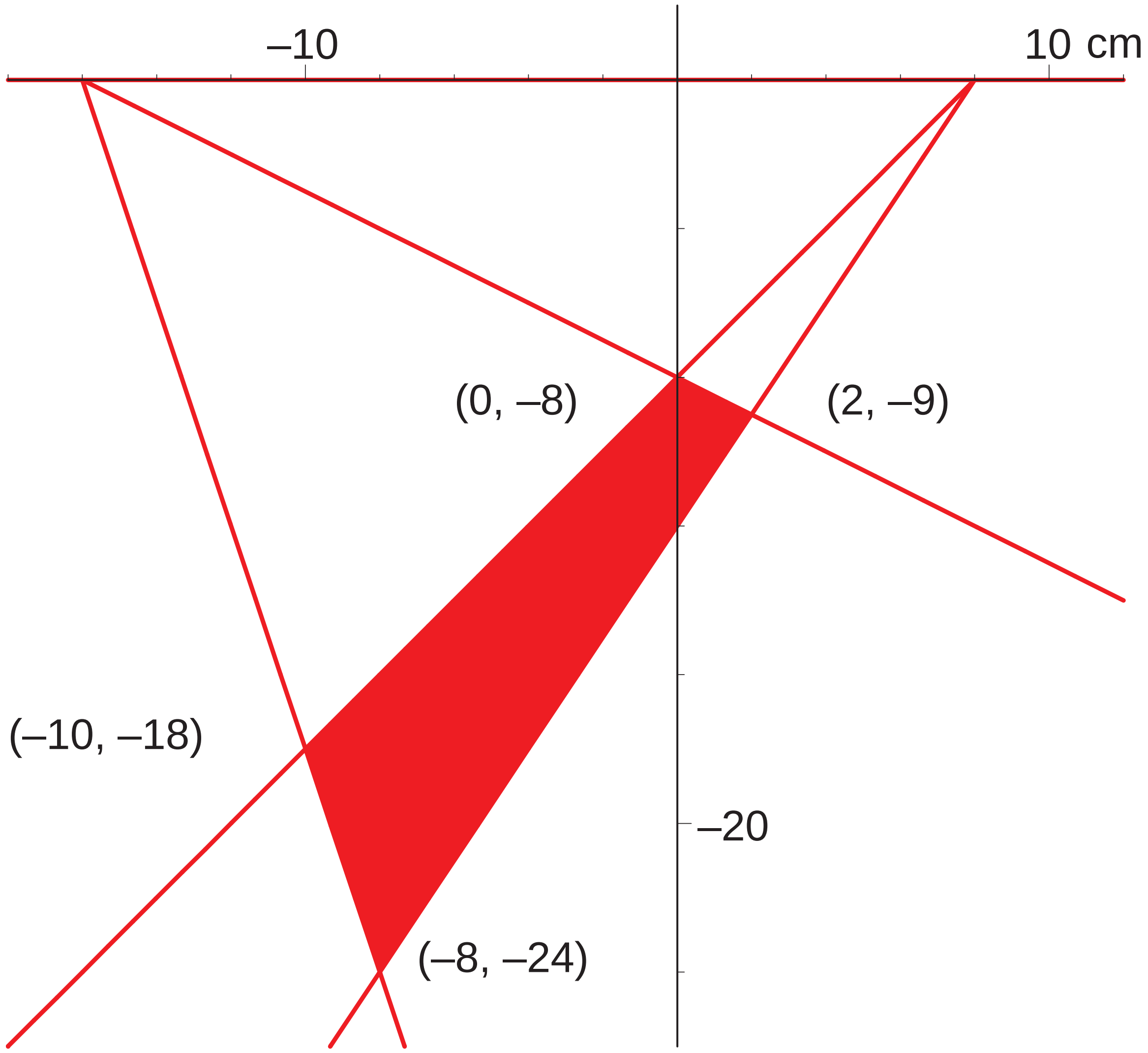
$$G^\vee = \{L_P \mid P \in E\} \subset 2^{E^\vee}$$

mit

$$L_P = \{g \in G \mid P \in g\} \subset E^\vee$$

ist wieder eine ebene projektive Inzidenzgeometrie gegeben, die duale Geometrie $(E^\vee, G^\vee)$ von (E, G).

4. Eine Person mit Augenhöhe 150 cm hat die folgende perspektivische Zeichnung eines Quadrats angefertigt:



(a) Wie weit stand die Person von der Leinwand entfernt, wo auf der Leinwand liegt der zentrale Fluchtpunkt, d.h. der Schnittpunkt der Geraden senkrecht zur Zeichenebene?

(b) Wie groß war das Quadrat?