Lineare Algebra II
Übungsblatt 8

Abgabetermin Freitag, den 11.06.2010 vor der Vorlesung.

1. Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume und $f \in \operatorname{End}(V)$ und $g \in \operatorname{End}(W)$ Endomorphismen mit charakteristischen Polynomen

$$\chi_f(t) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k - t) \qquad \chi_g(t) = \prod_{l=1}^{m} (\mu_l - t)$$

Geben Sie das charakteristische Polynom von $f \otimes g$ an.

2. Sei $\alpha \in \operatorname{Hom}(K^n, K^m)$ und $\beta \in \operatorname{Hom}(K^t, K^s)$ mit darstellenden Matrizen $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{s \times t}$ und das Kroneckerprodukt

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in K^{ms \times nt}$$

die darstellende Matrix von $\alpha \otimes \beta$ bezüglich der in der Vorlesung gewählten Basen von $K^n \otimes K^t$ und $K^m \otimes K^s$. Zeigen Sie:

(a) Sind $C \in K^{n \times o}$ und $D \in K^{t \times u}$ die Matrixdarstellungen von Homomorphismen $\gamma \in \operatorname{Hom}(K^o, K^n)$ und $\delta \in \operatorname{Hom}(K^u, K^t)$, dann ist

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

(b)

$$^t(A \otimes B) = \left({}^tA \otimes {}^tB\right)$$

(c) Sind A und B symmetrisch, dann ist $A \otimes B$ symmetrisch.

(d) Sind A und B invertierbar (also insbes. $m = n$ und $s = t$), dann ist

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

3. Seien $A \in K^{n \times n}$ und $B \in K^{m \times m}$. Zeigen Sie

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$$

4. Seien V und W Vektorräume über K. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$\psi : V^* \otimes W \to \operatorname{Hom}(V, W)$$
$$\psi\Big(\sum_{i \in I,\ \text{endlich}} \varphi_i \otimes w_i\Big)(v) = \sum_{i \in I} \varphi_i(v)\, w_i \qquad \text{für } v \in V$$

ist ein wohldefinierter Monomorphismus von K-Vektorräumen.

(b) Für $\dim V, \dim W < \infty$ ist ψ ein Isomorphismus.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Bild} \psi = \{\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \dim_K(\varphi(V)) < \infty\}$$

(d) Für $V = W = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ ist $id_V \in \operatorname{Hom}(V, V)$ nicht im Bild von ψ.