Lineare Algebra II
Übungsblatt 9

Abgabetermin Freitag, den 18.06.2010 vor der Vorlesung.

1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie
$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

2. Sei α der halbe Innenwinkel des regulären Tetraeders an einer Kante.

   (a) Zeigen Sie
$$\sin\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

   (b) Zeigen Sie, dass
$$\sin(n\cdot\alpha) = \frac{a_n}{\left(\sqrt{3}\right)^n \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}$$
   mit $a_n \in \mathbb{Z}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$,
$$a_{n+1} + 6\cdot a_{n-1} = 4\cdot a_n$$
   und $a_n \equiv 1 \bmod 3$.

   (c) Folgern Sie
$$\frac{\alpha}{\pi}, \frac{2\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$$

3. Zeigen Sie:

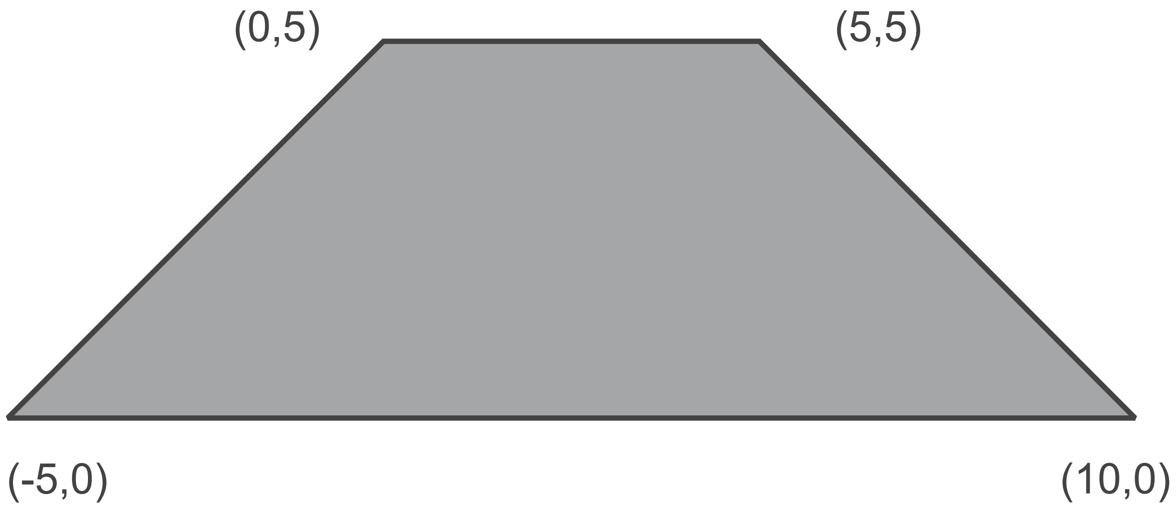
   (a) Jedes Dreieck ist zerschneidungsäquivalent zu einem Rechteck.

   (b) Je zwei Parallelogramme mit selber Höhe und Basis sind zerschneidungsäquivalent.

   (c) Jedes Rechteck ist zerschneidungsäquivalent zu einem Quadrat.
   Hinweis: Ein Rechteck mit Seitenlängen $a < b$ enthält zwei disjunkte rechtwinklige Dreiecke mit Katheten der Längen a und $\sqrt{ab}$. Ein Quadrat mit Seitenlängen $\sqrt{ab}$ ebenfalls.

   (d) Jedes Polygon ist zerschneidungsäquivalent zu einem Quadrat.

   (e) Basteln Sie aus Pappe ein Puzzle aus folgendem Trapez



   mit Ecken $(-5,0), (10,0), (5,5), (0,5)$, sodass sich die Teile zu einem Quadrat zusammensetzen lassen (2 Extrapunkte).

   (f) Basteln Sie ein solches Puzzle auch für das reguläre Sechseck (2 Extrapunkte).

4. (a) Sei $V = \mathbb{R}^4$ und $f \in \operatorname{End}(V)$ gegeben bezüglich der Standardbasis $e_1, ..., e_4$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Koeffizienten von $e_1 \otimes e_2 \otimes e_3$ in der Basisdarstellung von

$$(f \otimes f \otimes f)(e_2 \otimes e_3 \otimes e_4)$$

(b) Welche Dimension hat $V^{\otimes n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und einen endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

(c) Sei

$$f : V \to W$$

eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass f sich auf eindeutige Weise zu einem K-Algebrenhomomorphismus

$$T(f) : T(V) \to T(W)$$

der Tensoralgebren fortsetzt.

(d) Zeigen Sie, dass für $V \cong K$ gilt

$$T(V) \cong K[x]$$

als K-Algebren.