UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Jens Römer

Übungen zur Vorlesung Algebraische Topologie

Wintersemester 2013/14

Blatt 3 4. November 2013

Aufgabe 1. Seien A, X und Y topologische Räume und $i_X : A \to X$ bzw. $i_Y : A \to Y$ injektive Abbildungen, so dass A homöomorph zu den Bildern von i_X und i_Y ist.

a) Zeigen Sie, dass es einen topologischen Raum Z zusammen mit stetigen Abbildungen $j_X : X \to Z$ und $j_Y : Y \to Z$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "i_Y"] & X \arrow[d, "j_Z"] \\ Y \arrow[r, "j_Y"] & Z \end{tikzcd}$$

kommutiert und die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jedes andere Tupel (j'_X, j'_Y, Z') mit $j'_X \circ i_X = j'_Y \circ i_Y$ gibt es eine eindeutige Abbildung $Z \to Z'$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "i_Y"] & X \arrow[d, "j_X"] \arrow[ddr, bend left, "j'_X"] & \\ Y \arrow[r, "j_Y"] \arrow[drr, bend right, "j'_Y"] & Z \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\ & & Z' \end{tikzcd}$$

Wir sagen, dass Z durch **Zusammenkleben von X und Y entlang A** entstanden ist.

b) Seien X und Y Hausdorffsch. Formulieren Sie eine hinreichende Bedingung an (A, i_X, i_Y), so dass Z Hausdorffsch ist.

Aufgabe 2. Wir betrachten für die topologischen Räume $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ und $SO(3, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^9$ und die Euler-Koordinaten:

$$\varphi : S^3 \to SO(3, \mathbb{R}),$$
$$(s_0, s_1, s_2, s_3) \mapsto \begin{pmatrix} s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 & -s_0s_1 + s_2s_3 & -s_0s_2 - s_1s_3 \\ -s_0s_1 - s_2s_3 & -s_0^2 + s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 & -s_1s_2 + s_0s_3 \\ -s_0s_2 + s_1s_3 & -s_1s_2 - s_0s_3 & -s_0^2 - s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), E_3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. Ist X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so können wir auf der Menge $X/_\sim$ der Äquivalenzklassen eine Topologie definieren, in dem wir eine Teilmenge U von $X/_\sim$ offen nennen, genau dann wenn $\pi^{-1}(U) \in X$ offen ist, wobei $\pi : X \to X/_\sim$ die Projektion auf die Äquivalenzklassen ist.
Sei G eine Gruppe, die auf X operiert. Dann ist auf X eine Äquivalenzrelation wie folgt definiert: Für $x, y \in X$ ist $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $g \in G$ gibt mit $x = g.y$. Der Quotientenraum wird auch mit X/G bezeichnet.

Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ operiert auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ durch Konjugation. Zeigen Sie: $\mathbb{C}^{n\times n}/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist bzgl. der Quotiententopologie nicht Hausdorffsch.

Die folgende Aufgabe ist nur für Teilnehmer, die die Funktionentheorie Vorlesung und die Algebra Vorlesung gehört haben.

Aufgabe 4. a) Sei $f \in \mathbb{C}[x,y]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $d \geq 2$ in y. Weiterhin sei $R = \mathbb{C}[x,y]/\langle f\rangle$ der Koordinatenring von $X = V(f)$ und

$$K = \mathrm{Quot}(R) = \mathbb{C}(x)[y]/\langle f\rangle$$

der Quotientenkörper von R.
Dann ist K eine endliche algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{C}(x)$. Sei H die galoische Hülle von K über $\mathbb{C}(x)$ und G die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(H/\mathbb{C}(x))$ von $f \in \mathbb{C}(x)[y]$. Die Galoisgruppe G ist eine Untergruppe von S_d.

b) Sei $\pi : X \to \mathbb{C}$ die Projektion auf die x-Koordinate und

$$B = \{b \in \mathbb{C} | \pi^{-1}(b) \neq d\} \subset \mathbb{C}$$

die Menge aller Verzweigungspunkte oder Polstellen von π.
Dann ist $X\backslash\pi^{-1}(B) \to \mathbb{C}\backslash B$ eine unverzweigte Überlagerung. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $0 \notin B$.
Sei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}\backslash B$ ein geschlossener Weg mit $\alpha(0) = 0$. Für jeden Punkt $q_1, \ldots, q_d \in \pi^{-1}(0)$ betrachten wir die Wegliftung α_i von α mit Anfangspunkt q_i. Dann gilt, dass $\alpha(1) \in \{q_1, \ldots, q_d\}$. Wir definieren eine Permutation $\sigma \in S_d$ durch $\alpha_i(1) = q_{\sigma(i)}$.
Zeigen Sie, dass dies einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : \pi_1(\mathbb{C}\backslash B, 0) \to S_d$$

definiert.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Im}(\rho) \cong G$.

Hinweis: Der Satz über implizite Funktionen zeigt, dass es für jedes $q_i = (0, y_i)$ eine holomorphe Potenzreihe $g_i(x)$ gibt, mit $g_i(0) = y_i$ und $f(x, g_i(x)) = 0$.
Betrachten Sie nun den Körper $L = \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ der meromorphen Laurentreihen und den Unterkörper $H = \mathbb{C}(x)[g_1, \ldots, g_d] \subset L$. Dann ist H ein Zerfällungskörper von $f \in \mathbb{C}(x)[y]$. Argumentieren Sie nun mit analytischer Fortsetzung, dem Identitätssatz und dem Hauptsatz der Galoistheorie.

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 11.11.2013 vor der Vorlesung abzugeben.