UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Jens Römer

Übungen zur Vorlesung Algebraische Topologie

Wintersemester 2013/14

Blatt 5 18. November 2013

Aufgabe 1. Ein endlicher Komplex von K-Vektorräumen ist eine Folge

$$F : 0 \to F_0 \to F_1 \to \cdots F_n \to 0$$

von K-Vektorraumhomomorphismen $f_k : F_k \to F_{k+1}$ mit $\mathrm{Bild}(f_k) \subset \mathrm{Kern}(f_{k+1})$. Ein endlicher Komplex F heißt exakt, falls $\mathrm{Bild}(f_k) = \mathrm{Kern}(f_{k+1})$.
Zeigen Sie, dass für einen exakten endlichen Komplex von K-Vektorräumen gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim(F_k) = 0$$

Aufgabe 2. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Unterkategorien der Kategorie abelscher Gruppen und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein kovarianter Funktor. Eine exakte Sequenz ist eine Folge:

$$\cdots \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to \cdots$$

von Objekten $A_i \in \mathcal{C}$ und Morphismen $\alpha_i : A_i \to A_{i+1}$, so dass $\mathrm{Bild}(\alpha_i) = \mathrm{Kern}(\alpha_{i+1})$ gilt. Eine exakte Sequenz vom Typ

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

heißt kurze exakte Sequenz.
Wir nennen F linksexakt bzw. rechtsexakt, falls für alle kurzen exakten Sequenzen die induzierten Sequenzen:

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$$

bzw.

$$F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$

exakt sind.
Sei M ein R-Modul. Zeigen Sie:

a) Der Funktor

$$\mathrm{Hom}(M, \_) : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R, N \mapsto \mathrm{Hom}(M, N)$$

ist rechtsexakt.

b) Der Funktor

$$M \otimes \_ : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R, N \mapsto M \otimes N$$

ist linksexakt.

Aufgabe 3. Zwei Funktoren $R : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $L : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ zwischen zwei Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen *adjungiert*, falls es eine Familie von Bijektionen

$$\Phi_{Y,X} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(LY, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, RX)$$

für alle Objekte $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$ gibt, so dass für alle Morphismen $f : X \to X'$ und $g : Y' \to Y$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(LY, X) \arrow[r, equal, "\Phi_{Y,X}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(Lg,f)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, RX) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(g,Rf)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(LY', X') \arrow[r, equal, "\Phi_{Y',X'}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y', RX')
\end{tikzcd}$$

L heißt dann der zu R *linksadjungierte Funktor* und R der zu L *rechtsadjungierte Funktor*. Bestimmen Sie einen rechtsadjungierten Funktor zum Vergiss-Funktor $L : \mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Sets}$ von der Kategorie der Abelschen Gruppen $\mathfrak{Ab}$ in die Kategorie der Mengen $\mathfrak{Sets}$.

Aufgabe 4. Bearbeiten Sie weiterhin Aufgabe 4 von Blatt 3.

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 25.11.2013 vor der Vorlesung abzugeben.