UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Jens Römer

Übungen zur Vorlesung Algebraische Topologie

Wintersemester 2013/14

Blatt 7 2. Dezember 2013

Aufgabe 1. Betrachten Sie den Doppelkomplex

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & C_0 \arrow[u] & C_1 \arrow[l] \arrow[u] & C_2 \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] \\
0 & D_0 \arrow[l] & F_{0,0} \arrow[l] \arrow[u] & F_{0,1} \arrow[l] \arrow[u] & F_{0,2} \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] \\
0 & D_1 \arrow[l] \arrow[u] & F_{1,0} \arrow[l] \arrow[u] & F_{1,1} \arrow[l] \arrow[u] & F_{1,2} \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] \\
0 & D_2 \arrow[l] \arrow[u] & F_{2,0} \arrow[l] \arrow[u] & F_{2,1} \arrow[l] \arrow[u] & F_{2,2} \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

wobei alle Zeilen und Spalten bis auf die Komplexe $C_\bullet$ und $D_\bullet$ exakt seien. Zeigen Sie: $H_i(C_\bullet) \cong H_i(D_\bullet)$.

Aufgabe 2. Seien R ein Noetherscher Ring, M und N endlich erzeugte R-Moduln. Ferner sei

$$0 \leftarrow M \leftarrow F_0 \leftarrow F_1 \leftarrow \dots$$

ein (nicht notwendig exakter) Komplex mit freien R-Moduln F_i und

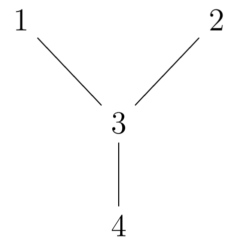
$$0 \leftarrow N \leftarrow G_0 \leftarrow G_1 \leftarrow \dots$$

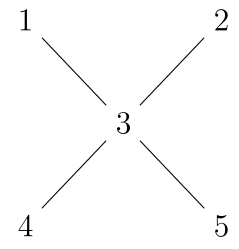
eine freie Auflösung von N. Zeigen Sie: Zu jedem Morphismus $\varphi : M \to N$ gibt es einen Morphismus von Komplexen $\varphi_p : F_p \to G_p, p \geq 0$. Bis auf Homotopie von Komplexen ist dieser eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3. Sei P eine endliche Menge zusammen mit einer Halbordnung $>$. Eine *Kette* der Länge k in M ist eine Teilmenge $\{m_1, \dots, m_k\} \subset M$ mit $m_1 < m_2 < \dots < m_k$.

(1) Zeigen Sie: Die Menge der Ketten in 2^M bildet einen abstrakten simplizialen Komplex $K(M, >)$.

(2) Interpretieren Sie die folgenden Mengen mit ihrer partiellen Ordnung als simpliziale Komplexe:





Aufgabe 4. Jeder simpliziale Komplex K ist vermöge Inklusion eine partiell geordnete Menge $P(K)$. Beschreiben Sie $K(P(K))$ und vergleichen Sie $|K|$ mit $|K(P(K)|$.

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 09.12.2013 vor der Vorlesung abzugeben.