UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Jens Römer

Übungen zur Vorlesung Algebraische Topologie

Wintersemester 2013/14

Blatt 9 16. Dezember 2013

Aufgabe 1. Sie N ein R-Modul. Zeigen Sie: Es gibt für jede kurze exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_{i+1}^R(M'', N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M', N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M, N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M'', N) \to \mathrm{Tor}_{i-1}^R(M', N) \to \dots$$

Aufgabe 2. Für einen nichtleeren topologischen Raum X bezeichnen die *reduzierten Homologiegruppen* $\tilde{H}_n(X)$ die Homologiegruppen des erweiterten Kettenkomplexes

$$\cdots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

mit $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$.

(1) Welcher Zusammenhang besteht zwischen H_i und $\tilde{H}_i$?
(2) Berechnen Sie die reduzierten Homologiegruppen des Einpunktraumes.
(3) Geben Sie die Mayer-Vietoris-Sequenz für reduzierte Homologiegruppen an.

Aufgabe 3. Sei K ein simplizialer Komplex und G eine abelsche Gruppe. Wir setzen $C_{-1}(K, G) := 0$ und

$$C_p(K, G) := \text{Gruppe erzeugt von } \sum g_I \Delta_I, \text{ mit } I \in K, |I| = p + 1, g_I \in G$$

für $p \geq 0$. Die Homologie des resultierenden Komplexes heißt *Homologie mit Koeffizienten in* G.
Sei K eine Triangulierung von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Homologie von K mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. (Satz vom Igel)
Eine Abbildung

$$\varphi : S^2 \to \mathbb{R}^3,$$

die $x \perp \varphi(x)$ für $x \in S^2$ erfüllt, heißt *(tangentiales) Vektorfeld*.
Zeigen Sie: Jedes stetige Vektorfeld hat eine Nullstelle.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass die Antipodenabbildung

$$S^2 \to S^2, \ x \mapsto -x$$

der folgenden Abbildung auf den Homologiegruppen entspricht:

$$H^2(S^2) \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot(-1)} H^2(S^2).$$

Diese Tatsache lässt sich mit Stoff aus kommenden Vorlesungsstunden leicht beweisen.

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 6.01.2014 vor der Vorlesung abzugeben.
Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Start in das neue Jahr.