UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 2

Sommersemester 2014
Das Übungsblatt wird nicht mehr abgegeben und bewertet.

Ferienblatt 16. Juli 2014

Aufgabe 1. Seien V ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $< .,. >$ und $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeigen Sie:

(a) $U^{\perp\perp} = U$,
(b) $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$,
(c) $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

Aufgabe 2. Sei $U = < \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t >$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.
(b) Geben Sie die darstellende Matrix der orthogonalen Projektion $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auf U bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ an.

Aufgabe 3. Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, die die folgenden Vektoren aufeinander abbildet.

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(d)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

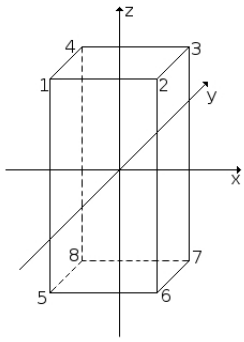
Aufgabe 4. Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf $\mathrm{Bild}(A)$.
(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $(\ker(A))^{\perp}$.
(c) Bestimmen Sie die Pseudoinverse A^+ von A.

Aufgabe 5. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren und $A = v \cdot w^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Rang 1 Matrix. Zeigen Sie, dass $A^+ = \frac{A^t}{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2}$ die Pseudoinverse zu A ist.

Aufgabe 6. Seien $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen und $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in V$. Sei $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von V. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_B^B(\varphi)$ der linearen Matrix $\varphi : V \to V,\ A \mapsto M \cdot A$.

Aufgabe 7. Wir betrachten den Quader Q mit Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 2) \in \mathbb{R}^3$, dessen Schwerpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt:



(a) Welche Ordnung hat die Symmetriegruppe G des Quaders Q?
(b) Welche Bahnlängen können auftreten?
(c) Wir fassen G als Untergruppe von $O(3) = \{S \in \mathbb{R}^{3\times 3} | \det(S) = \pm 1\}$ auf. Geben Sie die Elemente von G als Untergruppe von $O(3)$ an.
(d) Wir fassen G als Untergruppe von S_8 auf, indem wir die Ecken durchnummerieren. Geben Sie die Elemente von G als Untergruppen von S_8 an.

Aufgabe 8. Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 14 & -24 & -24 \\ -4 & 10 & 8 \\ 12 & -24 & -22 \end{pmatrix}$. Diagonalisieren Sie die Matrix A, indem Sie eine invertierbare Matrix S^{-1} angeben, sodass $S \cdot A \cdot S^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist. (Hinweis: A hat Eigenwerte 2 und -2.)

Aufgabe 9. Bestimmen Sie die Normalform der folgenden Quadrik:

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 |\ \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + 2x_2 - 1 = 0 \right\}.$$

Aufgabe 10. Welche der folgenden Matrizen ist positiv definit?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11. Bestimmen Sie über $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5$ die Inverse von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{F}_5)^{4\times 4}.$$

Aufgabe 12. Welche der folgenden Matrizen sind über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, welche sind nicht diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$