UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 2

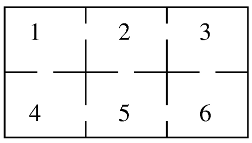
Sommersemester 2014
Die Lösungen des Übungsblattes sind am 16.07.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Blatt 12 09. Juli 2014

Aufgabe 1 (Matrixnormen)**.** Zeigen Sie, dass die zur Supremumsnorm gehörige Matrixnorm die Zeilensummennorm ist, also dass für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Aufgabe 2 (Labyrinth)**.** Betrachten Sie das folgende Labyrinth, in dem sich eine Maus bewegt:



Befindet sich die Maus in Kammer j, so bleibt sie mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dort und wechselt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2\omega_j}$ in die Kammer i, falls von Kammer j genau ω_j Türen abgehen und eine davon in Kammer i führt. Stellen Sie die Übergangsmatrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,6}$ auf, zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} A^k$ existiert und bestimmen Sie diesen.

Aufgabe 3 (Grenzverteilung von Markovketten)**.** Wir betrachten eine Markovkette mit der folgenden Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$M = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass eine eindeutige Grenzverteilung existiert und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 4 (Zum Satz von Gerschgorin)**.** (a) Zeigen Sie die folgende Version des Satzes von Gerschgorin: Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und sei b ein Eigenwert von A mit Eigenvektor ${}^t(v_1, \ldots, v_n)$. Sei i_0 der Index, für den $|v_j|$ maximal wird. Dann gilt: $|b - a_{i_0i_0}| \leq \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} |a_{i_0j}|$, d.h. der Eigenwert b liegt in einem sog. Gerschgorin-Kreis um $a_{i_0i_0}$ mit Radius $\sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} |a_{i_0j}|$.

Hinweis: Betrachten Sie $|v_{i_0}| \cdot |b - a_{i_0i_0}|$.

(b) Benutzen Sie ein Computer Algebra System (z.B. Maple), um die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} -5 & -0.1 & -4 \\ 0 & 2 & 0.1 \\ 0.1 & -0.85 & 3 \end{pmatrix}$$

zu berechnen. Zeichnen Sie die Gerschgorin-Kreise und die Eigenwerte in ein gemeinsames Koordinatensystem.