UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 2

Sommersemester 2014

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 07.05.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Blatt 2 30. April 2014

Aufgabe 1 (Lineare Unabhängigkeit)**.**

(a) Prüfen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind. Bestimmen Sie in jedem Fall die Dimension des aufgespannten Raumes und geben Sie eine Basis an.

(1) $(1,1,0)^{\mathrm{t}}$, $(1,0,1)^{\mathrm{t}}$, $(0,1,1)^{\mathrm{t}} \in (\mathbb{F}_2)^3$.

(2) $(1,2,3)^{\mathrm{t}}$, $(2,3,4)^{\mathrm{t}}$, $(3,4,5)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3$.

(3) $(5,0,5,-4)^{\mathrm{t}}$, $(0,5,-5,-3)^{\mathrm{t}}$, $(5,-5,10,-1)^{\mathrm{t}}$, $(-4,-3,-1,5)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^4$.

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(2,\lambda,3)^{\mathrm{t}}$, $(1,-1,2)^{\mathrm{t}}$, $(-\lambda,4,-3)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig? Stellen Sie für diese λ den letzten Vektor als Linearkombination der ersten beiden dar.

Aufgabe 2 (Untervektorräume)**.** Welche der folgenden Mengen U_i sind Untervektorräume der Vektorräume V_i? Berechnen Sie in diesen Fällen auch deren Dimension.

(a) $V_1 := \mathbb{R}^5,\ \ U_1 := \{p \in \mathbb{R}^5 \mid \ ||p|| = 1\}$.

(b) $V_2 := \mathbb{R}^4,\ \ U_2 := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+w = 0,\ w = 0\}$.

(c) $V_3 := \mathbb{R}^3,\ \ U_3 := \Big\{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, (1,2,3)^{\mathrm{t}} \rangle = 0\Big\}$.

(d) $V_4 := \mathbb{R}^4,\ \ U_4 := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid (x+y)\cdot(x-y) = 0\}$.

(e) $V_5 := \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{ax^3+bx^2+cx+d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\},\ \ U_5 := \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid b+d = 0,\ a+c = 0\}$.

Aufgabe 3 (Basen)**.** Sei $\mathbb{F} := \mathbb{F}_5$ der Körper mit fünf Elementen.

(a) Wie viele Elemente hat $\mathbb{F}^3$?

(b) Wie viele verschiedene Basen hat $\mathbb{F}^3$?

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Kodierungstheorie)**.**

Parity Check: Ist ein Daten-Wort $w = (w_1, w_2, \dots, w_{19}) \in (\mathbb{F}_2)^{19}$ gegeben, so setzen wir:
$(v_1, v_2, \dots, v_{19}, v_{20}) := (w_1, w_2, \dots, w_{19}, p) \in (\mathbb{F}_2)^{20}$, wobei p die Parität des Wortes w ist, d.h.:

$$p = \begin{cases} 0, \text{ falls } w_1 + w_2 + \cdots + w_{19} \equiv 0 \mod 2, \\ 1, \text{ falls } w_1 + w_2 + \cdots + w_{19} \equiv 1 \mod 2. \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass bei der Übermittlung eines Wortes $v \in (\mathbb{F}_2)^{20}$ höchstens ein Buchstabe fehlerhaft beim Empfänger ankommt. Zeigen Sie, dass der Empfänger unter dieser Annahme erkennen kann, welche Wörter nicht korrekt übertragen wurden und welche er daher nochmals anfragen muss.

Hamming Code: Für ein Daten-Wort $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in (\mathbb{F}_2)^4$ werden beim Hamming-Code drei Parity-Check-Bits p_1, p_2, p_3 hinzugefügt, um einen Ein-Bit-Übertragungsfehler auch korrigieren zu können. Das übertragene Wort ist dann $v = (v_1, \dots, v_7) = (p_1, p_2, w_1, p_3, w_2, w_3, w_4) \in (\mathbb{F}_2)^7$. Hierbei sind p_i, $i = 1, 2, 3$, Paritäten gewisser Teil-Wörter von v. Das Teil-Wort t_i enthält 2^{i-1} Bits von v ab dem 2^{i-1}-ten Bit, enthält die nächsten 2^{i-1} Bits nicht, enthält die nächsten 2^{i-1}-ten Bits aber wieder, usw. t_1 ist also das Teil-Wort $(v_1, v_3, v_5, v_7) = (p_1, w_1, w_2, w_4)$, $t_2 = (v_2, v_3, v_6, v_7)$, $t_3 = (v_4, v_5, v_6, v_7)$. Lassen wir den ersten Buchstaben von t_i weg, so erhalten wir ein neues Wort, das wir s_i nennen. p_i, $i = 1, 2, 3$, ist nun definiert als die Parität des Wortes s_i.
Wie lauten die Daten, die als $a = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$, $b = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$, $c = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$ empfangen wurden, unter der Annahme, dass maximal ein Bit falsch übertragen wurde?