UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 2

Sommersemester 2014

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 14.05.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Blatt 3 07. Mai 2014

Aufgabe 1 (Austauschbarkeit von Basiselementen)**.**
Seien $v_1 = (1, 3, -2, 2)^t,\ v_2 = (-3, 2, -1, 1)^t,\ v_3 = (1, 3, -2, 3)^t.$

$$V := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind.
(b) Ist es möglich, einen der Vektoren v_1, v_2, v_3 durch $v = (-5, -4, 3, -5)^t$ auszutauschen? Wenn ja, welchen?
(c) Ist es möglich, einen der Vektoren v_1, v_2, v_3 durch $w = (-1, 2, -3, 4)^t$ auszutauschen? Wenn ja, welchen?
(d) Finden Sie einen Vektor $v_4 \in \mathbb{R}^4$, der v_1, v_2, v_3 zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzt.

Aufgabe 2 (Basen von Untervektorräumen)**.** Seien

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W := \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Unterräume des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $U \cap W$.

Aufgabe 3 (Multiplikation von Matrizen)**.** Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie AB und BA. Können Sie $AB \neq BA$ auch ohne Rechnen einsehen?

Aufgabe 4 (Matrizen und Kommutativität)**.** (a) Bestimmen Sie alle Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

für die gilt:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A.$$

(b) Man sagt, eine $n \times n$ Matrix M kommutiert mit einer $n \times n$ Matrix N, wenn $MN = NM$. Bestimmen Sie alle reellen 2×2 Matrizen, die mit jeder reellen 2×2 Matrix kommutieren.