UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 2

Sommersemester 2014
Die Lösungen des Übungsblattes sind am 21.05.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Blatt 4 14. Mai 2014

Aufgabe 1 (Gauß-Algorithmus).

(a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \\ 125 \end{pmatrix}.$$

(b) Invertieren Sie die 4×4 Matrix aus Aufgabenteil (a).

Aufgabe 2 (Matrixdarstellung einer linearen Abbildung).
Für eine Menge N bezeichne $\mathrm{id}_N \colon N \to N$ die identische Abbildung. Sei $V := \mathbb{R}[t]_{\leq d}$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung

$$A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$$

von id_V bzgl. der Basen $\mathcal{A} := \{1, t, \ldots, t^d\}$ und $\mathcal{B} := \{1, t-\alpha, \ldots, (t-\alpha)^d\}$.

Aufgabe 3 (Kern und Bild).

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von Kern und Bild derjenigen linearen Abbildungen, die durch folgende Matrizen definiert werden. Überprüfen Sie die Dimensionsformel für diese Beispiele.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kurze Begründung:

(1) $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, (2) $\operatorname{Ker} A \supset \operatorname{Ker} A^2 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

(3) $\operatorname{Bild} A \subset \operatorname{Bild} A^2 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, (4) $\operatorname{Bild} A \supset \operatorname{Bild} A^2 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Aufgabe 4 (Invertierbarkeit von Matrizen). Zeigen Sie: Die *Vandermondsche Matrix*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \ldots & \alpha_0^d \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_d & \alpha_d^2 & \ldots & \alpha_d^d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $\alpha_0, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind.
(Hinweis: Ein nicht triviales Polynom vom Grad $\leq n$ hat höchstens n Nullstellen.)